

LECCIÓN N° 4

ANÁLISIS CINEMÁTICO DE LOS MECANISMOS PLANOS POR MEDIO DEL MÉTODO GRÁFICO

4.1 LA CINEMÁTICA DE LOS MECANISMOS

El análisis cinemático de los mecanismos, es decir, *el estudio del movimiento de los eslabones sin tener en cuenta las fuerzas que condicionan el movimiento*, comprende básicamente la solución de los tres problemas siguientes:

- determinación de los desplazamientos de los eslabones y las trayectorias descritas por los puntos del eslabón,
- determinación de las velocidades de ciertos puntos de los eslabones y las velocidades angulares de los eslabones,
- determinación de las aceleraciones de ciertos puntos de los eslabones y las aceleraciones angulares de los eslabones.

Si el mecanismo posee un grado de libertad, entonces los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los eslabones están en función de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del eslabón escogido como primario. Si el mecanismo posee varios grados de libertad, entonces los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los eslabones están en función de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los eslabones escogidos como primarios. En este caso el número de eslabones primarios debe ser igual al número de grados de libertad del mecanismo o lo que es lo mismo, igual al número de coordenadas generalizadas del mecanismo.

Miremos en qué forma pueden ser expresadas las leyes de movimiento de los eslabones primarios. Estas leyes de movimiento se denominan *funciones de desplazamiento, velocidades o aceleraciones*.

La *función de desplazamiento* puede ser dada, por ejemplo, en forma analítica como la correspondiente función que relaciona el desplazamiento del eslabón primario con el tiempo.

Si el eslabón primario forma una junta giratoria con el bastidor (Fig. 4.1a), se expresa la función $\varphi = f(t)$, donde φ es el ángulo de giro del eslabón primario con respecto a un sistema fijo de coordenadas xOy , unido al bastidor y t es el tiempo. Si el eslabón primario forma una junta de desplazamiento con el bastidor (Fig. 4.1b), se expresa la función $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento de un punto cualquiera A que pertenece al eslabón primario con respecto a un sistema fijo de coordenadas xOy , unido al bastidor y t es el tiempo.

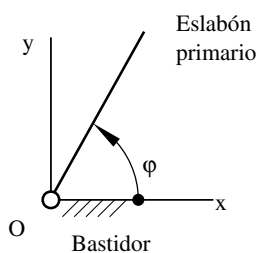


Fig. 4.1a

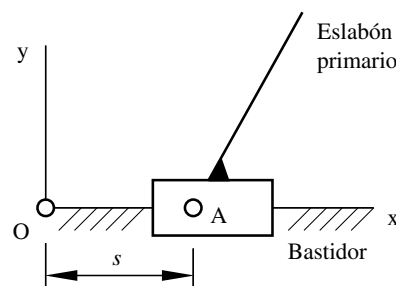


Fig. 4.1b

Las funciones $\varphi = f(t)$ y $s = f(t)$, también pueden estar dadas gráficamente en forma de curvas (Fig. 4.2), donde en el eje de las ordenadas se consignan los ángulos de giro φ (Fig. 4.2a) o los desplazamientos s (Fig. 4.2b) representados a escala (μ_φ, μ_s) y por el eje de las abscisas se consigna el tiempo en su correspondiente escala μ_t .

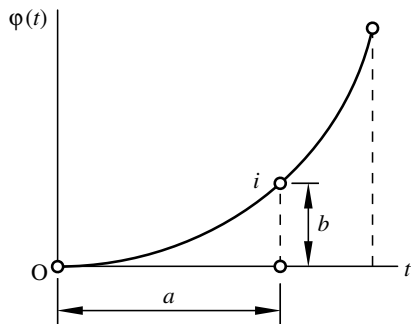


Fig 4.2.a

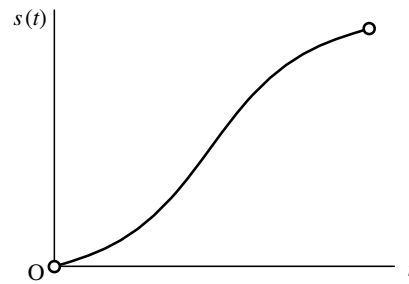


Fig 4.2.b

4.2 DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN DE LOS ESLABONES DE LOS GRUPOS Y CONSTRUCCIÓN DE LA TRAYECTORIA DESCRITA POR PUNTOS DE LOS ESLABONES DE LOS MECANISMOS

Para resolver la tarea de la determinación de las posiciones de un mecanismo (plano de posición) es necesario contar con el esquema cinemático del mecanismo y la función de desplazamiento del eslabón primario para los mecanismos con un grado de libertad, o las funciones de desplazamiento para los mecanismos con varios grados de libertad.

Para la determinación de las posiciones del mecanismo se construye el esquema cinemático, el cual se construye a una escala escogida con anterioridad. Representaremos, de manera arbitraria, al coeficiente de escala como μ_l , que corresponde al número de metros del mecanismo natural, que corresponden a un milímetro en el esquema, es decir $1 \text{ mm} \rightarrow \mu_l$. De esta manera, si se necesita determinar la verdadera longitud de un segmento representado en el esquema, es necesario medir el segmento en milímetros y el resultado de la medición multiplicarlo por el coeficiente de escala μ_l , el resultado se obtendrá en metros.

Estudiemos el método gráfico de construcción del plano de posición en el ejemplo de un mecanismo de seis eslabones de segunda clase que se muestra en la Fig. 4.3.

El mecanismo consta del eslabón primario 2, el cual gira alrededor del eje fijo A . El ángulo de giro φ_2 es la coordenada generalizada del mecanismo. El eslabón 3 *entra* en los pares giratorios B_1 y C_1 con el eslabón 2 y el eslabón 4, el cual gira alrededor del eje fijo D . El eslabón 5 *entra* en los pares giratorios E_1 y F_1 con el eslabón 4 y con el deslizador 6, el cual se desliza a lo largo del eje B_1a del eslabón 3.

El orden de construcción del plano de posiciones es el siguiente.

Marcamos en el dibujo (Fig. 4.3) los ejes fijos A y D . Con un radio igual a la longitud del eslabón AB trazamos la circunferencia b , la cual es el lugar geométrico de los puntos B . Sobre esta circunferencia marcamos las posiciones $B_1, B_2, B_3 \dots$ del punto B , para las cuales se requiere determinar la posiciones de todos los eslabones del mecanismo. En la Fig. 4.2 las construcciones necesarias están hechas para la posición de la manivela AB determinada por el punto B_1 . Para determinar la posición del punto D trazamos la circunferencia c , que representa el lugar geométrico de los puntos C , y desde el punto B_1 con un radio igual a B_1C_1 trazamos la circunferencia d , la cual es el lugar geométrico de los puntos C . El punto C_1 de intersección de las circunferencias c y d determina la posición del punto C_1 . Después de haber trazado la recta C_1D del eslabón 4 es fácil determinar la posición del punto E . Por consiguiente, para el segundo grupo con dos miembros de arrastre (EF) ya son conocidas las posiciones de los pares cinemáticos de los extremos, es decir, la posición de E y la directriz C_1a .

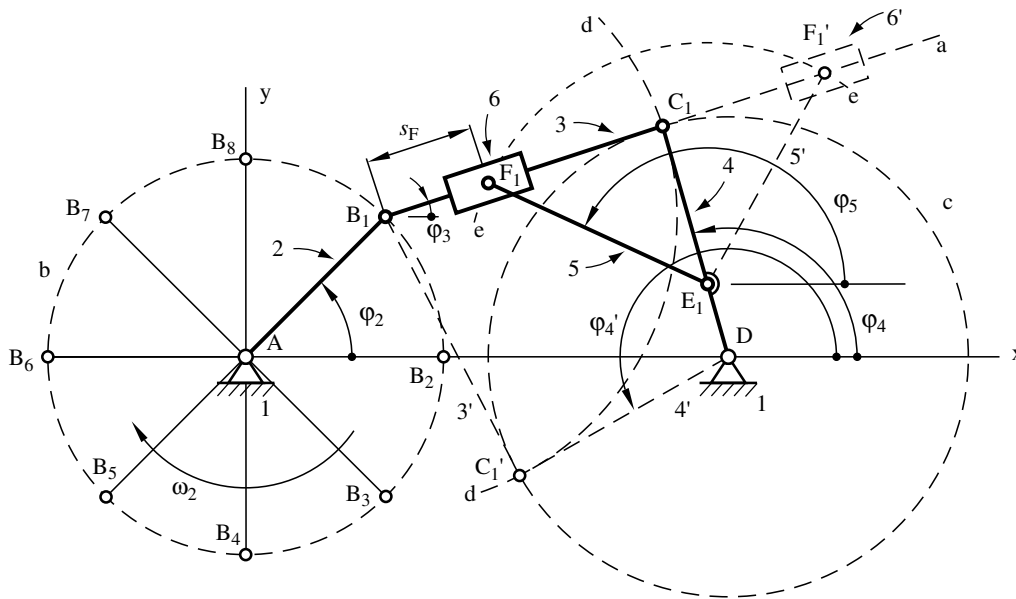


Fig. 4.3

Queda por determinar la posición de F_1 , lo que puede ser logrado si desde el punto E trazamos la circunferencia e . Entonces la intersección de la circunferencia e con la recta B_1a determina la posición del punto F_1 .

De hecho la tarea de construcción de los planos de posición de los eslabones de un mecanismo de II clase se resume en la determinación en serie de las posiciones de los eslabones de los grupos con dos miembros de arrastre, en los cuales son conocidas las posiciones de los elementos de los pares de los extremos.

De manera general, el orden de construcción del plano de posiciones de un grupo de II clase es como sigue. Dado el grupo de II clase con tres pares giratorios B , C y D (grupo del primer tipo), mostrado en la Fig. 4.4.

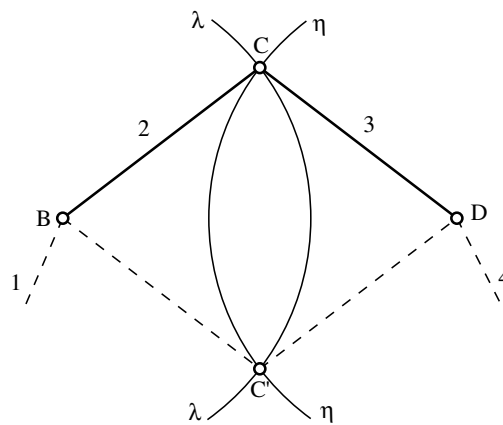


Fig. 4.4

Como se vio anteriormente la posición de los puntos B y D es conocida, ya que los eslabones 2 y 3 con sus elementos extremos B y D “entran” en pares cinemáticos con los eslabones 1 y 4 del mecanismo base y por consiguiente la tarea se resume en determinar la posición del punto C . Separamos la junta en el punto C y observamos el movimiento posible de este punto. Como B ocupa una posición completamente determinada, entonces C , encontrándose a una distancia constante BC del punto B , se puede desplazar únicamente por la circunferencia $\lambda - \lambda$ de radio BC . De la misma manera, como consecuencia de la condición de distancia

constante DC , el punto C se puede desplazar alrededor del punto D solamente por la circunferencia $\eta - \eta$ de radio DC . De esta manera el lugar geométrico de las posibles posiciones del punto C son los arcos de circunferencia $\lambda - \lambda$ y $\eta - \eta$. Los puntos de intersección de estas circunferencias representan las verdaderas posiciones del punto C . En el caso más general dos circunferencias se intersecan en dos puntos dando como resultado los puntos C' y C'' . Debido a que los puntos del mecanismo en movimiento se desplazan por trayectorias continuas, es posible elegir el punto correcto haciendo uso de esta propiedad. Si las circunferencias $\lambda - \lambda$ y $\eta - \eta$ no se intersecan, esto nos indica que con las dimensiones de los eslabones dadas el grupo no puede ser adherido en la posición dada al mecanismo base, y en el caso de que en otras posiciones esa adherencia sí sea posible esto nos indica que el mecanismo no puede ocupar la posición estudiada.

La construcción de los planos de posición de los grupos de II clase con pares de deslizamiento se resuelve de manera análoga, usando el método de los lugares geométricos $\lambda - \lambda$ y $\eta - \eta$.

Para hallar las posiciones de los mecanismos planos de III clase es también posible hacer uso del método de los lugares geométricos. A diferencia de los mecanismos de II clase en los mecanismos de III clase los lugares geométricos pueden ser no sólo circunferencias sino rectas o curvas de órdenes superiores.

Sea, por ejemplo, dado el grupo con tres miembros de arrastre mostrado en la figura 4.5.a

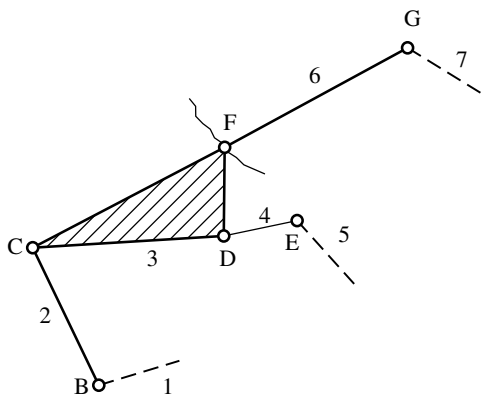


Fig. 4.5.a

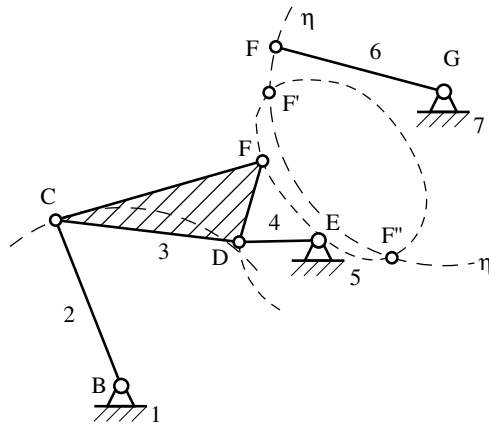


Fig. 4.5.b

La posición de los puntos B , E , y G están dadas, ya que el grupo con sus elementos B , E , y G “entra” en pares cinemáticos con los eslabones 1, 5 y 7 del mecanismo base. Se pide determinar la posición de los demás puntos. Como hicimos con los grupos de II clase separamos una de las juntas del triángulo rígido 3, por ejemplo la junta F . Entonces los sistemas de eslabones $BCDE$ y GF adquieren cada uno un grado de libertad y ambos sistemas se convierten en mecanismos independientes si hacemos que los eslabones 1, 5 y 7 se conserven inmóviles. Entonces el sistema $BCDE$ (Fig. 4.5) se convierte en un mecanismo de II clase mientras que el sistema GF en un mecanismo de I clase, ambos con un grado de libertad. Construimos la trayectoria $\lambda - \lambda$ del punto F , perteneciente al acoplador CD del mecanismo de cuatro barras $BCDE$, la cual se denomina *curva de acoplador*. Después construimos la trayectoria $\eta - \eta$ del punto F del eslabón GF (circunferencia de radio GF). De ese modo el lugar geométrico de las posibles posiciones del punto F son la curva $\lambda - \lambda$ y la circunferencia $\eta - \eta$. Los puntos de intersección F' y F'' de estos dos lugares geométricos son las posibles posiciones del punto F . Puesto que las curvas de acoplador pueden ser curvas de grado superior, en el caso general podemos obtener varios puntos de intersección de esta curva con la circunferencia. Para determinar cuál es el punto verdadero se hace necesario utilizar la propiedad de continuidad de la trayectoria del punto F durante el movimiento del grupo. Después de determinar la verdadera posición del punto F se puede construir la posición de los demás eslabones del mecanismo. Por medio del método de separación de juntas es posible determinar la posición de los puntos de cualquier mecanismo de III clase.

Si han sido halladas las posiciones de los eslabones del mecanismo para una cantidad suficientemente representativa de posiciones del eslabón primario, es posible construir la trayectoria descrita por diferentes

ANÁLISIS CINEMÁTICO DE LOS MECANISMOS PLANOS POR MEDIO DEL MÉTODO GRÁFICO

puntos del mecanismo. Supongamos que se pida construir la trayectoria del punto E del mecanismo de cuatro barras (Fig. 4.6).

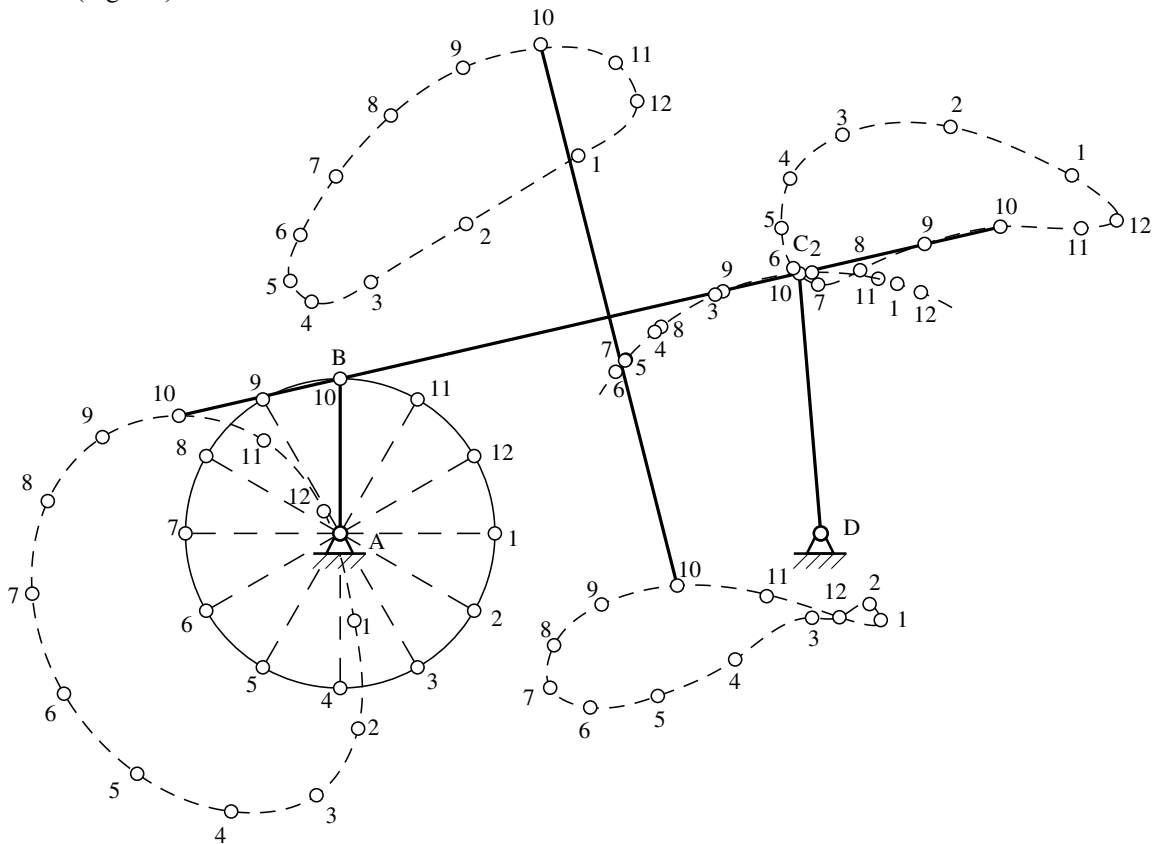


Fig. 4.6

Dividimos la trayectoria del punto B en 12 partes iguales y encontramos las posiciones correspondientes del punto C . Uniendo en cada posición los puntos B y C encontramos en el eslabón BC la posición del punto E . Trazando una curva suave las posiciones sucesivas del punto E obtenemos la trayectoria del punto E .

Además de la trayectoria del punto E en el dibujo se muestran las trayectorias de otros puntos del acoplador BC .

Como se dijo anteriormente la trayectoria de los puntos pertenecientes al acoplador se denominan *curvas de acoplador*. Las curvas de acoplador se usan para reproducir el movimiento de los órganos de trabajo de distintas máquinas y mecanismos. Por ejemplo, en el mecanismo de la máquina para voltear el heno con el objeto de orearlo (Fig. 4.7), en la máquina de amasar (Fig. 4.8), etc.

Las curvas de acoplador del mecanismo de cuatro barras de forma general (Fig. 4.6) son curvas algebraicas de sexto orden. Las curvas de acoplador de los mecanismos de biela - deslizador son curvas de cuarto grado.

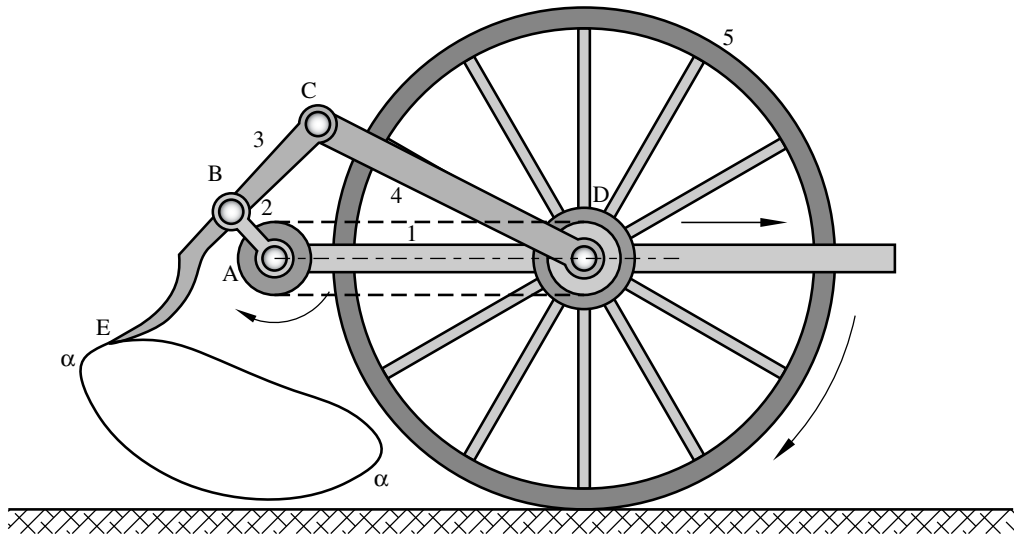


Fig. 4.7

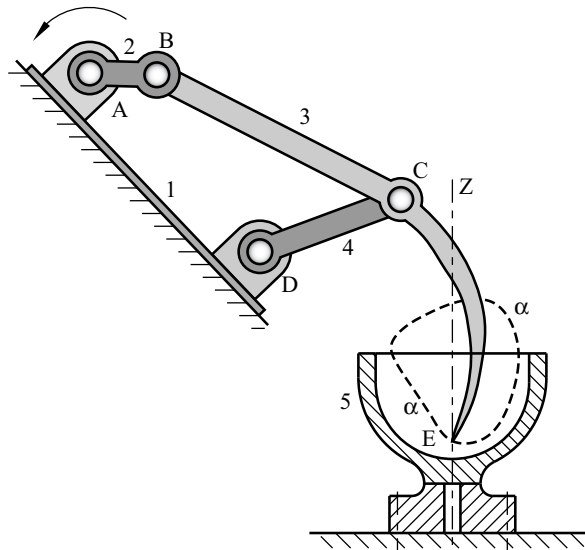


Fig. 4.8

Ejemplo: Se pide construir el plano de posición del mecanismo de un motor de combustión interna (Fig. 4.9 a), para la posición en la cual el eslabón primario AB forma un ángulo $\varphi_1 = 45^\circ$ con el eje Ax . Las medidas del mecanismo son: $L_{AB} = 50 \text{ mm}$, $L_{BC} = L_{DE} = 200 \text{ mm}$, $L_{BD} = 40 \text{ mm}$, $L_{CD} = 180 \text{ mm}$, $\alpha = 60^\circ$, $\delta = 60^\circ$.

Solución:

1) Estructura del mecanismo

Número de eslabones del mecanismo $k = 6$,

Número de eslabones móviles $n = k - 1 = 5$,

Número de pares cinemáticos de V clase $p_V = 7$

Número de grados de libertad $W = 3n - 2p_V = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$

El mecanismo se compone de un mecanismo primario y dos grupos de Assur de II clase, compuestos por los eslabones 4,5 y 2,3. La fórmula de construcción del mecanismo puede ser escrita así: $I_{(1)} \rightarrow II_{(2,3)} \rightarrow II_{(4,5)}$.

ANÁLISIS CINEMÁTICO DE LOS MECANISMOS PLANOS POR MEDIO DEL MÉTODO GRÁFICO

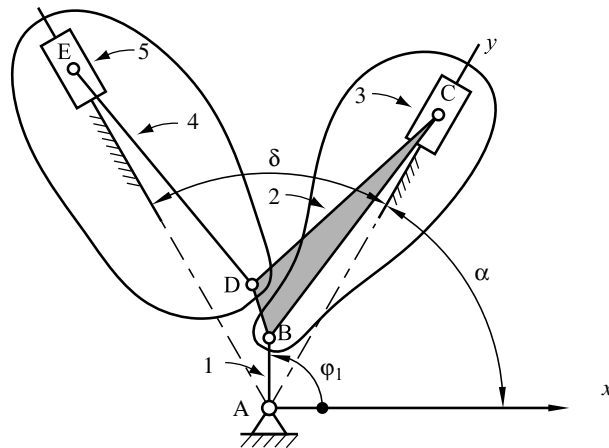


Fig. 4.9 a

- 2) El eslabón primario fue determinado en las condiciones del problema y es AB .
- 3) Marcamos en el dibujo la posición de los pares cinemáticos inmóviles: El apoyo giratorio A y las directrices de los dos apoyos deslizantes Ay y Az . (Fig. 4.9 b).

Escogemos la longitud del segmento AB , la cual representa en el dibujo la longitud del eslabón primario, arbitrariamente igual a 25 mm. Entonces el coeficiente de escala del esquema es:

$$\mu_L = \frac{L_{AB}}{AB} = \frac{0,050}{25} = 0,002 \frac{\text{m}}{\text{mm}}.$$

Dibujamos la posición del eslabón primario bajo un ángulo $\varphi_1 = 45^\circ$ con el eje Ax .

- 4) Calculamos la longitud de los segmentos BC , BD , CD , DE :

$$BC = \frac{L_{BC}}{\mu_L} = \frac{0,200}{0,002} = 100 \text{ mm}, \quad BD = \frac{L_{BD}}{\mu_L} = \frac{0,040}{0,002} = 20 \text{ mm}$$

$$CD = \frac{L_{CD}}{\mu_L} = \frac{0,180}{0,002} = 90 \text{ mm}, \quad DE = \frac{L_{DE}}{\mu_L} = \frac{0,200}{0,002} = 100 \text{ mm}$$

Construimos la posición del grupo compuesto de los eslabones 2,3. Desde el punto B trazamos una circunferencia de radio BC hasta la intersección con la línea Ay , de esta manera encontramos la posición del punto C . Con esto queda construida la posición del grupo compuesto por los eslabones 2,3.

Sobre el lado BC construimos el triángulo BDC . Para esto trazamos una circunferencia de radio CD con centro en C y una segunda circunferencia de radio BD con centro en B . La intersección de estas dos nos mostrará la posición de D .

La posición del grupo compuesto por los eslabones 4,5 se construye de manera análoga teniendo conocidas la posición de B y la directriz Az .

El plano de posición completo puede apreciarse en la siguiente hoja.

LECCIÓN N° 5

DETERMINACIÓN DE LAS VELOCIDADES DE LOS GRUPOS DE II CLASE POR EL MÉTODO DE LOS PLANOS

5.1 VELOCIDADES PARA EL GRUPO DE II CLASE, TIPO 1

La determinación de las velocidades de los grupos de II clase puede realizarse por el método de los planos de velocidades. Ya que los mecanismos de II clase están formados por la unión en serie de grupos, entonces es posible describir el método de los planos para los distintos tipos de grupos de II clase. De manera análoga a la construcción de los planos de posición deben ser conocidas las velocidades de los elementos de los eslabones que “entran” en los pares cinemáticos con los cuales el grupo se une al mecanismo base. Se busca, entonces determinar las velocidades de determinados puntos del grupo y las velocidades angulares de los eslabones.

Miremos el grupo de II clase del primer tipo, el cual está formado por dos eslabones que conforman tres pares cinemáticos (Fig. 5.1)

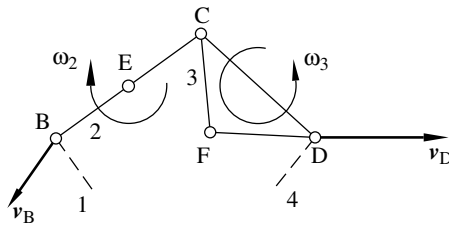


Fig. 5.1 a

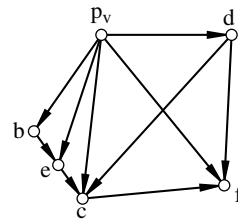


Fig. 5.1 b

De manera análoga al problema de las posiciones del grupo aquí son conocidos los vectores de las velocidades de los puntos B y D de los elementos extremos del grupo, con los cuales los eslabones 2 y 3 “entran” en pares cinemáticos con los eslabones 1 y 4 del mecanismo base (velocidades v_B y v_D). Se pide determinar el vector v_C de la velocidad del punto C .

El desplazamiento total complejo del punto C puede ser siempre descompuesto en un movimiento de traslación con la velocidad del punto B o del punto D y en una rotación relativa alrededor del punto B o del punto D , correspondientemente. Entonces las ecuaciones vectoriales para la velocidad v_C del punto C tendrán la siguiente forma:

$$v_C = v_B + v_{CB}, \quad v_C = v_D + v_{CD}, \quad (5.1)$$

donde v_C , v_B y v_D son los vectores de las velocidades absolutas de los puntos C , B y D correspondientemente. v_{CB} y v_{CD} son los vectores de las velocidades relativas del punto C con respecto a los puntos B y D .

De las ecuaciones (5.1) obtenemos

$$v_B + v_{CB} = v_D + v_{CD} \quad (5.2)$$

En las ecuaciones (5.1) son conocidas la magnitud y la dirección de los vectores v_B y v_D . De los vectores v_{CB} y v_{CD} sólo se conoce su dirección. El vector v_{CB} de la velocidad relativa de C con respecto al punto B está dirigido perpendicularmente a BC , y el vector v_{CD} de la velocidad relativa de C con respecto al punto D está dirigido perpendicularmente a DC .

LECCIÓN No 5. DETERMINACIÓN DE VELOCIDADES POR EL MÉTODO GRÁFICO DE LOS PLANOS

De esta manera en la ecuación (5.2) son desconocidas solamente las magnitudes de los vectores de las velocidades v_{CB} y v_{CD} , las cuales pueden ser determinadas mediante la construcción del plano de velocidades (Fig. 5.1 b).

Escogemos en calidad de *polo* del plano de velocidades un punto cualquiera p , trazamos partiendo de éste los segmentos pb y pd , los cuales representan las velocidades v_B y v_D de los puntos B y D en cualquier escala arbitrariamente escogida μ_v de manera que $1 \text{ mm} \rightarrow \mu_v \text{ m/s}$. Para escoger el factor de escala μ_v la única regla a seguir es la comodidad de cálculos y construcciones en el dibujo.

Para obtener las magnitudes verdaderas de las velocidades de los puntos B y D tomamos las longitudes de los segmentos pb y pd medidas en milímetros y las multiplicamos por el factor de escala μ_v escogido, el cual muestra cuantas unidades de velocidad corresponden a 1 mm del segmento correspondiente. Obtenemos la respuesta en m/s.

$$v_B = \mu_v \cdot pb, \quad v_D = \mu_v \cdot pd.$$

Después de trazar los segmentos pb y pd , trazamos a través del punto b y d rectas con las direcciones de los vectores de las velocidades relativas v_{CB} y v_{CD} , perpendiculares a BC y DC . El punto c de intersección de estas dos rectas determina el final del vector v_C de la velocidad absoluta del punto C del grupo. La velocidad v_C de acuerdo a las ecuaciones (5.1) está representado por el segmento pc , el cual une el punto p con el punto hallado c . La magnitud de esta velocidad será igual a

$$v_C = \mu_v \cdot pc.$$

Los segmentos bc y dc representan las velocidades relativas v_{CB} y v_{CD} en la misma escala, es decir

$$v_{CB} = \mu_v \cdot bc, \quad v_{CD} = \mu_v \cdot dc.$$

Las flechas de los vectores en el plano de velocidades deben ser puestas de tal manera que satisfagan las ecuaciones (5.1)

Los triángulos $pbcb$ y $pdcd$ se llaman *planos de velocidades* de los eslabones 2 y 3, y la figura $pbcdb$ se llama *plano de velocidades del grupo BCD*. El punto p del plano se llama *polo del plano de velocidades*.

Por medio del plano de velocidades es posible determinar las velocidades angulares ω_2 y ω_3 de los eslabones 2 y 3. Las magnitudes de estas velocidades se determinan con las igualdades

$$|\omega_2| = \frac{v_{CB}}{l_2}, \quad |\omega_3| = \frac{v_{CD}}{l_3}, \quad (5.3)$$

donde l_2 y l_3 son las longitudes BC y DC de los eslabones 2 y 3.

Si el plano de posición del grupo BCD está construida con un factor de escala μ_l y reemplazamos en las ecuaciones (5.3) las magnitudes de las velocidades v_{CB} y v_{CD} , expresadas a través del factor de escala μ_v como los segmentos correspondientes del plano de velocidades y las longitudes de los eslabones BC y DC , expresadas a través del factor de escala μ_l , obtenemos:

$$|\omega_2| = \frac{\mu_v \cdot bc}{\mu_l \cdot BC}, \quad |\omega_3| = \frac{\mu_v \cdot dc}{\mu_l \cdot DC}.$$

La razón $\frac{\mu_v}{\mu_L}$ posee unidades de s^{-1} .

Las direcciones de las velocidades angulares ω_2 y ω_3 pueden ser determinadas de la siguiente manera. Aplicando mentalmente los vectores v_{CB} y v_{CD} en el punto C , vemos que el giro del eslabón 2 ocurre en dirección de las manecillas del reloj y que el giro del eslabón 3 en la dirección contraria. Fig. 5.1.

Para determinar la velocidad de cualquier punto E situado en el eje del eslabón BC podemos escribir la siguiente ecuación vectorial

$$v_E = v_B + v_{EB}, \quad (5.4)$$

Atendiendo esta ecuación desde el punto b del plano de velocidades trazamos la dirección del vector v_{EB} de la velocidad relativa del punto E alrededor del punto B . Ya que las velocidades relativas de todos los puntos situados sobre el eje BC del eslabón 2 son perpendiculares al eje BC , es evidente que la dirección del vector de la velocidad v_{EB} coincide en dirección con la dirección del vector de la velocidad v_{CB} , es decir, el segmento be , del plano de velocidades, que determina la velocidad v_{EB} , coincide en dirección con el segmento bc . El tamaño del segmento que determina a v_{EB} se halla a partir de las siguientes expresiones

Tenemos

$$v_{CB} = \omega_2 \cdot L_{BC} \quad (5.5)$$

y

$$v_{EB} = \omega_2 \cdot L_{BE}. \quad (5.6)$$

Dividiendo miembro a miembro (5.6) y (5.5) obtenemos

$$\frac{v_{EB}}{v_{CB}} = \frac{l_{BE}}{l_{BC}}. \quad (5.7)$$

De la ecuación (5.7) se puede deducir que las velocidades relativas de los puntos E y C con respecto al punto B son directamente proporcionales a las distancias de estos puntos al punto B . Sustituyendo las velocidades por sus segmentos correspondientes del plano de velocidades

$$\frac{\mu_v \cdot be}{\mu_v \cdot bc} = \frac{l_{BE}}{l_{BC}},$$

de donde

$$be = bc \cdot \frac{l_{BE}}{l_{BC}}. \quad (5.8)$$

Es decir, para determinar la longitud del segmento del plano de velocidades que refleja la velocidad relativa v_{EB} , es necesario dividir el segmento bc , el cual representa en el plano la velocidad relativa v_{BC} , en la misma proporción en la cual el punto E divide al eslabón 2 en el esquema cinemático del grupo. (Fig. 5.1).

Después de determinar el segmento resultante be en el plano de velocidades y unirlo con el polo del plano p , obtenemos el segmento pe . El cual representa, en la escala μ_v la velocidad v_E del desplazamiento total del punto E . Es decir,

$$v_E = \mu_v \cdot pe.$$

Para determinar la velocidad de un punto cualquiera F del eslabón 3 planteamos las siguientes ecuaciones vectoriales

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{FD}, \quad \mathbf{v}_F = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{FC}, \quad (5.9)$$

de las ecuaciones (5.9) obtenemos

$$\mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{FD} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{FC}.$$

Los vectores \mathbf{v}_D y \mathbf{v}_C de las velocidades de los punto D y C son conocidos en magnitud y dirección, pero de los vectores \mathbf{v}_{FD} y \mathbf{v}_{FC} se conoce solamente sus direcciones. El vector \mathbf{v}_{FD} es perpendicular al segmento FD y el vector \mathbf{v}_{FC} es perpendicular a FC . Desde el punto d del plano de velocidades trazamos una recta perpendicular a FD y a través del punto c trazamos otra recta perpendicular a FC , el punto de intersección f de las dos direcciones trazadas determina el final del vector \mathbf{v}_F de la velocidad total del punto F . El segmento del plano que representa a \mathbf{v}_F se obtiene uniendo el polo del plano p con el punto f . Para obtener el valor numérico de la magnitud

$$v_F = \mu_v \cdot pf.$$

Observando con detenimiento los triángulos $cf d$ del plano de velocidades y el triángulo CFD del eslabón 3 se puede ver que los segmentos cf , fd , y dc son perpendiculares a los segmentos CF , FD y DC correspondientemente es decir

$$cf \perp CF; \quad fd \perp FD; \quad dc \perp DC;$$

De manera que el triángulo $cf d$ del plano de velocidades, el cual representa las velocidades relativas \mathbf{v}_{FC} , \mathbf{v}_{FD} y \mathbf{v}_{CD} es semejante al triángulo CFD en el esquema, girado en 90° . Esta propiedad de semejanza de figuras de las velocidades relativas en el plano de velocidades con respecto a la figura del eslabón en el esquema del mecanismo, permite determinar las velocidades de cualquier punto de este eslabón sin partir de las ecuaciones, si no de manera gráfica, construyendo figuras semejantes. Para comprobar la corrección de las figuras semejantes construidas podemos revisar la correspondencia en el orden de las letras en el esquema y en el plano de velocidades. Así, si el orden de las letras en el esquema siguiendo el contorno del eslabón en sentido horario es C, D y F , en el plano de velocidades este orden debe conservarse es decir c, d y f .

Los vectores de las velocidades totales (absolutas) de los puntos de los eslabones tienen su inicio en el polo p del plan de velocidades, y los vectores de las velocidades relativas unen entre si los finales de los vectores de las velocidades totales.

5.2 VELOCIDADES PARA EL GRUPO DE II CLASE, TIPO 2

Miremos cómo se construyen los planos de velocidades cuando el grupo contiene pares de desplazamiento, por ejemplo un grupo de II clase del segundo tipo (Fig. 5.2) posee un par de desplazamiento D y dos pares giratorios en serie B y C .

El eslabón 2 “entra” en un par giratorio (B) con el eslabón 1 perteneciente al mecanismo base, y el eslabón 3 “entra” en un par de desplazamiento (D) con eslabón 4 del mecanismo base. Son conocidos: el vector de la velocidad \mathbf{v}_B del punto B y los vectores de las velocidades de todos los puntos pertenecientes al eslabón 4. Por consiguiente es conocida la velocidad angular ω_4 de este eslabón.

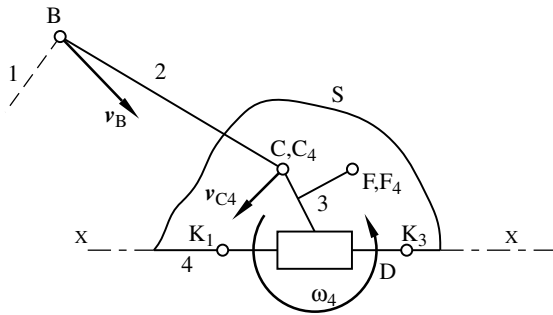


Fig. 5.2 a

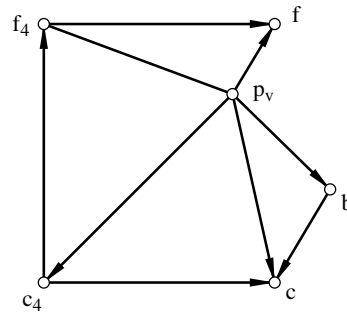


Fig. 5.2 b

El eslabón 3 se desliza a lo largo del eje $x - x$, directriz perteneciente al eslabón 4. Representemos el eslabón 4 en forma de una superficie S , coincidente, en la posición dada, con el punto C en el punto C_4 . El vector de la velocidad v_{C_4} del punto C_4 perteneciente al eslabón 4 es conocido. Entonces para determinar v_C (vector de la velocidad del punto C) es necesario resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$v_C = v_B + v_{CB}, \quad v_C = v_{C_4} + v_{CC_4}, \quad (5.10)$$

De donde

$$v_B + v_{CB} = v_{C_4} + v_{CC_4}, \quad (5.11)$$

En las ecuaciones (5.10) y (5.11) v_{CC_4} es el vector de la velocidad relativa del punto C con respecto al eslabón 4 y v_{CB} es el vector de la velocidad relativa del punto C con respecto al punto B .

En la ecuación (5.11) los vectores v_B y v_{C_4} de las velocidades de los puntos B y C_4 , son conocidos en magnitud y dirección. De los vectores de las velocidades relativas v_{CB} y v_{CC_4} se conoce sólo su dirección. Las magnitudes de las velocidades v_{CB} , v_{CC_4} y v_C son determinadas construyendo el plano de velocidades. Con este fin escogemos (Fig.5.2 b) cualquier punto p como polo del plano de velocidades y trazamos desde éste los vectores conocidos v_B y v_{C_4} de las velocidades de los puntos B y C_4 , en forma de los segmentos pb y pc_4 , los cuales representan, en la escala escogida μ_v , estas velocidades. Luego, a través del punto b trazamos una recta en la dirección del vector de la velocidad v_{CB} , perpendicular a BC (Fig.5.2 a), y a través del punto C_4 trazamos una recta en la dirección del vector v_{CC_4} de la velocidad relativa, paralela al eje $x - x$ del par de desplazamiento D . El punto de intersección de estas dos direcciones nos muestra el final del vector v_C de la velocidad del punto C . La magnitud de la velocidad v_C se determina por la fórmula

$$v_C = \mu_v \cdot pc.$$

Las velocidades de otros puntos del eslabón se determinan de la misma manera que en el caso anterior. La velocidad angular ω_2 del eslabón 2 se puede hallar de manera análoga al caso visto anteriormente. La velocidad angular del eslabón 3, el cual “entra” en un par de deslizamiento con el eslabón 4, posee la misma velocidad angular ω_4 que el eslabón 4, es decir

$$\omega_3 = \omega_4$$

Para determinar la velocidad de cualquier otro punto F del eslabón 3 (Fig. 5.2 a) planteamos la siguiente ecuación vectorial

$$v_F = v_{F_4} + v_{FF_4}, \quad (5.12)$$

LECCIÓN No 5. DETERMINACIÓN DE VELOCIDADES POR EL MÉTODO GRÁFICO DE LOS PLANOS

El vector v_{F_4} de la velocidad del punto F_4 perteneciente al plano S , es decir, al eslabón 4 nos es conocida. La velocidad v_{FF_4} es igual a v_{CC_4} , ya que el eslabón 3 se traslada de manera rectilínea con respecto al eslabón 4 y por consiguiente las velocidades relativas de todos los puntos del eslabón 3 con respecto al eslabón 4 son iguales entre si, por esto la ecuación (5.12) se puede escribir de la siguiente manera

$$v_F = v_{F_4} + v_{CC_4}, \quad (5.13)$$

Según la ecuación (5.13) desde el punto f_4 (Fig. 5.2 b) trazamos el segmento $f_4 f$, igual y paralelo a $c_4 c$. El segmento resultante pf representa en la escala μ_v la velocidad absoluta del punto F , es decir

$$v_F = \mu_v \cdot pf.$$

Ejemplo: Construir el plano de velocidades del mecanismo de una máquina limadora (Fig. 5.3). Encontrar la velocidad del eslabón 5. Datos: $\varphi_1 = 300^\circ$, $l_{AB} = 0,05$ m, $l_{AC} = 0,12$ m, $l_{CD} = 0,200$ m, $H = 0,10$ m, $l_{DE} = 0,08$ m. Velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 10$ s⁻¹.

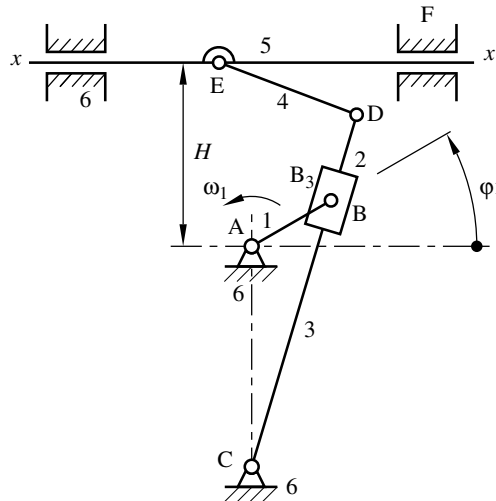


Fig. 5.3

Solución:

1) Análisis estructural del mecanismo

Número de eslabones $k = 6$

Número de eslabones móviles $n = 5$

Número de pares cinemáticos de V clase $p_v = 7$

Número de grados de libertad $W = 3n - 2 p_v = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$.

El mecanismo se compone de la siguiente manera: Al eslabón conductor AB y al bastidor 6 se une un grupo de Assur de II clase del tercer tipo, compuesto por los eslabones 2 y 3. A este grupo y al bastidor se une otro grupo de II clase del segundo tipo, compuesto por los eslabones 4 y 5. El mecanismo es de II clase. La fórmula constructiva del mecanismo se puede escribir así: $I_1 \rightarrow II_{2,3} \rightarrow II_{4,5}$.

2) Construimos el plano de posición del mecanismo. Escogemos la longitud del segmento AB igual a 25 mm, por esto el coeficiente de escala del esquema será

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,05}{25} = 0,002 \frac{\text{m}}{\text{mm}}$$

La longitud de los demás segmentos del esquema será entonces:

$$AC = \frac{l_{AC}}{\mu_l} = \frac{0,12}{0,002} = 60\text{mm} \quad CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0,2}{0,002} = 100\text{mm}$$

$$h = \frac{H}{\mu_l} = \frac{0,10}{0,002} = 50\text{mm} \quad DE = \frac{l_{DE}}{\mu_l} = \frac{0,08}{0,002} = 40\text{mm}$$

Con las medidas obtenidas construimos el plano de posición del mecanismo (ver Fig. 6.9)

3) Construimos el plano de velocidades del mecanismo. Comenzamos con el grupo I_1 .

La magnitud de la velocidad v_B del punto B es

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 10 \cdot 0,05 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Escogemos un punto p como polo y trazamos el segmento pb , el cual representa la velocidad del punto B, perpendicular a AB y en correspondencia con la dirección de giro del eslabón AB . La longitud de pb la escogemos igual a $AB = 25$ mm. Es decir, construimos el plano de velocidades en “escala de manivela”.

El coeficiente de escala del plano de velocidades será entonces

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{\omega_1 (AB) \mu_l}{pb} = \omega_1 \cdot \mu_l = 10 \cdot 0,002 = 0,02 \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}$$

4) Continuamos con el grupo de Assur, compuesto por los eslabones 2,3, ya que éste está unido directamente al eslabón primario y al bastidor. El plano de velocidades lo construimos de acuerdo a las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$v_{B_3} = v_B + v_{B_3B} \quad v_{B_3} = v_C + v_{B_3C}$$

donde

v_{B_3} es la velocidad del punto B_3 del eslabón 3, el cual está bajo el punto B;

v_B es la velocidad del punto B, de magnitud y dirección ya conocidas;

v_{B_3B} es la velocidad relativa del punto B_3 con respecto al punto B, dirigida paralela a la línea BC ;

v_C es la velocidad del punto C, y es igual a cero;

v_{B_3C} es la velocidad relativa del punto B con respecto al punto C al girar el eslabón 3,

su magnitud es $v_{B_3C} = \omega_3 \cdot l_{B_3C}$ (por el momento es desconocida), y está dirigida perpendicular a BC

Construimos la solución de la primera ecuación vectorial, mostrada arriba. A través del punto b trazamos la dirección de la velocidad v_{B_3B} , una línea paralela a CB_3 . Pasamos a construir la solución de la segunda ecuación vectorial mostrada arriba. Se debe trazar el vector de la velocidad del punto C, pero como su magnitud es igual a cero, su final lo situamos en el polo p y desde el punto p trazamos la dirección de la velocidad v_{B_3C} : una línea perpendicular a CB . La intersección de esta línea con la trazada antes (paralela a CB), nos da el final del vector de la velocidad v_{B_3} en el punto p_3 . El punto d , final del vector de la velocidad del punto D, lo encontramos por semejanza según la siguiente relación:

$$\frac{cd}{cb_3} = \frac{CD}{CB_3},$$

$$cd = cb_3 \frac{CD}{CB_3} = 16,7 \frac{100}{40,33} = 41,4\text{mm}$$

LECCIÓN No 5. DETERMINACIÓN DE VELOCIDADES POR EL MÉTODO GRÁFICO DE LOS PLANOS

Nota: Esta operación puede ser realizada también haciendo un escalamiento referenciado del eslabón con ayuda del CAD. (Ver práctica No.3)

Pasamos a la construcción del plano de velocidades del grupo 4,5. Este plano lo construimos según las siguientes ecuaciones:

$$v_E = v_D + v_{ED} \quad v_E = v_{E_6} + v_{EE_6}$$

v_E es la velocidad del punto E;

v_D es la velocidad del punto D (este vector ya está representado en el plano en forma del segmento pd)

v_{ED} es la velocidad relativa del punto E con respecto al punto D cuando el eslabón 4 gira

su magnitud es $v_{ED} = \omega_4 \cdot l_{DE}$ (por el momento desconocida), y está dirigida perpendicular a la línea DE

v_{E_6} es la velocidad del punto E_6 del eslabón 6 (el punto E_6 coincide con el punto E), La magnitud es igual a cero, ya que el eslabón 6 es inmóvil)

v_{EE_6} es la velocidad relativa del punto E con respecto a E_6 , está dirigida paralela a la línea $x-x$

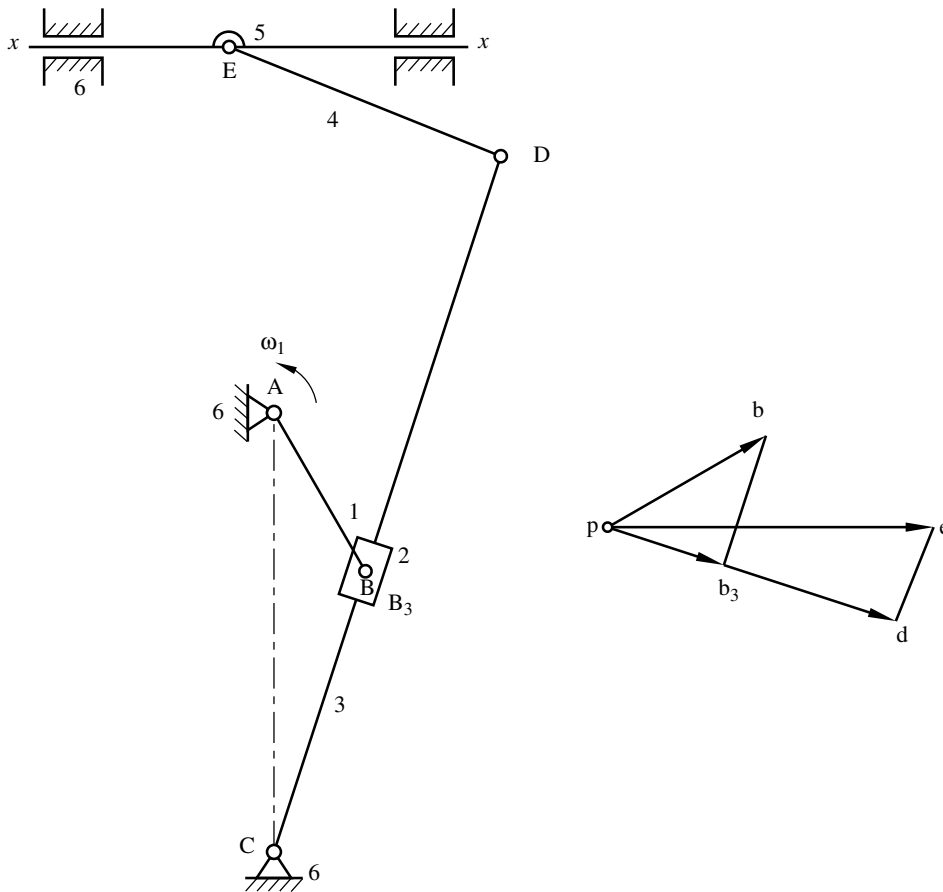


Figura 5.3.b Plano de posiciones y velocidades

La construcción se resume a trazar a través de d (de acuerdo a la primera ecuación) una línea perpendicular a DE , es decir perpendicular a la velocidad v_{ED} ; y a trazar a través del punto p (de acuerdo a la segunda ecuación) una línea paralela $x-x$. El punto e , de intersección de estas líneas, es el final del vector de la velocidad v_E del punto E. Situamos en el polo los puntos c , e_6 , a y damos por terminada la construcción del plano de velocidades del mecanismo.

LECCIÓN N° 6

DETERMINACIÓN DE LAS ACELERACIONES DE LOS GRUPOS DE II CLASE POR EL MÉTODO DE LOS PLANOS

6.1 ACELERACIONES PARA GRUPOS DE II CLASE, PRIMER TIPO

La determinación de las aceleraciones de los grupos de II clase puede realizarse por el método de los planos de aceleraciones. Ya que los mecanismos de II clase están formados por la unión en serie de grupos, entonces es posible describir el método de los planos para los distintos tipos de grupos de II clase. De manera análoga a la construcción de los planos de posición y velocidades deben ser conocidas las aceleraciones de los elementos de los eslabones que “entran” en los pares cinemáticos con los cuales el grupo se une al mecanismo base. Se busca, entonces determinar las aceleraciones de determinados puntos del grupo y las aceleraciones angulares de los eslabones.

Miremos el grupo de II clase del primer tipo, el cual está formado por dos eslabones que conforman tres pares cinemáticos (Fig. 6.1).

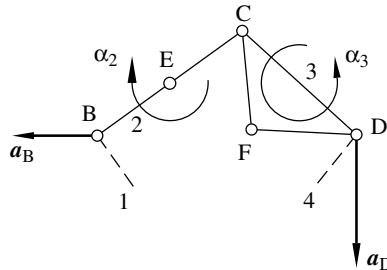


Fig. 6.1

Para determinar las aceleraciones de los grupos de II clase del primer tipo deben ser conocidos los vectores \mathbf{a}_B y \mathbf{a}_D de las aceleraciones totales de los puntos B y D. Además se suponen ya construidos los planos de posición y velocidades del grupo, y por consiguiente se cuenta con que son conocidas las velocidades de todos los eslabones del grupo. Para determinar la aceleración \mathbf{a}_C del punto C, como se hizo para la determinación de la velocidad \mathbf{v}_C del punto C, estudiaremos el movimiento de dicho punto como un movimiento complejo: compuesto de un movimiento de traslación con las velocidades y aceleraciones de los puntos B y D; y de un movimiento giratorio relativo alrededor de estos mismos puntos. Entonces las ecuaciones vectoriales para la aceleración \mathbf{a}_C del punto C tendrán la siguiente forma:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t, \quad \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t, \quad (6.1)$$

donde \mathbf{a}_{CB}^n y \mathbf{a}_{CD}^n son los vectores de las aceleraciones normales relativas y \mathbf{a}_{CB}^t , \mathbf{a}_{CD}^t son los vectores de las aceleraciones tangenciales relativas del punto C con respecto a los puntos B y D. Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos

$$\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t. \quad (6.2)$$

En la ecuación (6.2) son conocidas la magnitud y la dirección de los vectores \mathbf{a}_B y \mathbf{a}_D de los puntos B y D. Los vectores de las aceleraciones normales relativas \mathbf{a}_{CB}^n y \mathbf{a}_{CD}^n pueden ser determinados. Las magnitudes de estas aceleraciones son

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_2} = \omega_2^2 \cdot l_2, \quad a_{CD}^n = \frac{v_{CD}^2}{l_3} = \omega_3^2 \cdot l_3 \quad (6.3a)$$

Las velocidades v_{CB} , v_{CD} y las velocidades angulares ω_2 y ω_3 pueden ser determinadas con ayuda del plano de velocidades ya construido, las longitudes l_2 y l_3 de los eslabones 2 y 3 se determinan por el plano de posiciones. Sustituyendo en las expresiones anteriores las longitudes del plano de velocidades en la escala μ_v y del plano de posiciones en la escala μ_l , obtenemos

$$a_{CB}^n = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn_2), \quad a_{CD}^n = \frac{\mu_v^2 (bd)^2}{\mu_l (BD)} = \mu_a (dn_3), \quad (6.3b)$$

donde los segmentos bc y dc deben ser tomados del plano de velocidades, y μ_a es el factor de escala del plano de aceleraciones donde $1\text{mm} \rightarrow \mu_a \text{ m/s}^2$.

Como en el caso de las velocidades, para escoger el factor de escala μ_a la regla a seguir es la comodidad en los cálculos y en las construcciones gráficas. De manera que si se necesita determinar la magnitud real de una de las aceleraciones, de debe multiplicar la longitud del segmento correspondiente tomada del plano de aceleraciones (en milímetros) y multiplicarla por el factor de escala μ_a . El resultado se obtiene en $[\text{m/s}^2]$.

El vector de la aceleración a_{CB}^n está dirigido del punto C hacia el punto B paralelo a BC , el vector de la aceleración a_{CD}^n está dirigido del punto C hacia el punto D paralelo a CD . De manera que las aceleraciones angulares a_{CB}^n y a_{CD}^n son conocidas en magnitud y dirección. a_{CB}^n y a_{CD}^n

Los vectores a_{CB}^t y a_{CD}^t son conocidos sólo en dirección. El primero está dirigido perpendicular a la dirección BC y el segundo perpendicular a la dirección CD . De esta manera en la ecuación (6.2) restan solamente por conocer las magnitudes de los vectores de las aceleraciones a_{CB}^t y a_{CD}^t , las cuales pueden ser determinadas por medio de la siguiente construcción gráfica.

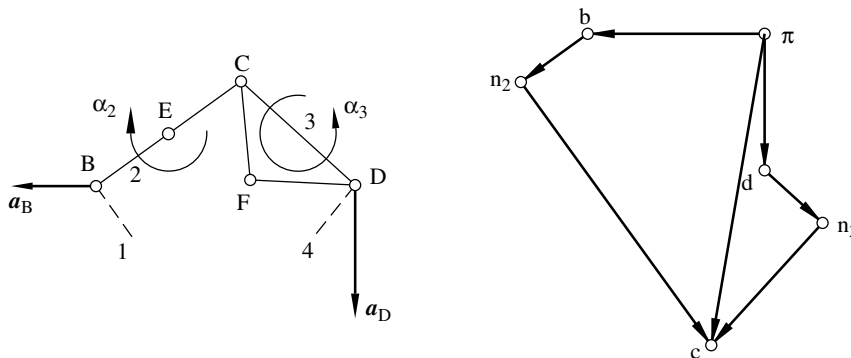


Fig. 6.2

Escogemos en calidad de polo del plano de aceleraciones el punto π , y trazamos partiendo de éste los segmentos πb y πd los cuales representan, en escala μ_a las aceleraciones de los puntos B y D . Acto seguido calculamos con ayuda de las ecuaciones (6.3ab), las magnitudes de los las aceleraciones a_{CB}^n y a_{CD}^n y trazamos, partiendo de los puntos b y d los segmentos bn_2 y dn_3 , los cuales representan en escala μ_a estas aceleraciones. Desde los puntos encontrados n_2 y n_3 trazamos rectas con la dirección de los vectores de las

aceleraciones tangenciales \mathbf{a}_{CB}^t y \mathbf{a}_{CD}^t perpendiculares a BC y CD respectivamente. El punto de intersección de estas rectas nos muestra el final del vector \mathbf{a}_C de la aceleración total del punto C . Es decir

$$a_C = \mu_a \cdot \pi c.$$

Las figuras $\pi b n_2 c$ y $\pi d n_3 c$ así construidas se llaman *planos de aceleraciones de los eslabones 2 y 3*, toda la figura $\pi b n_2 c n_3 d \pi$ se llama *plano de aceleraciones del grupo BCD*. El punto π se llama *polo del plano de aceleraciones*.

Uniendo los puntos b y d del plano con el punto c (Fig. 6.3), obtenemos los vectores de las aceleraciones totales relativas \mathbf{a}_{CB} y \mathbf{a}_{CD} . Tenemos

$$a_{CB} = \mu_a \cdot bc, \quad a_{CD} = \mu_a \cdot dc.$$

Las magnitudes de las aceleraciones angulares α_2 y α_3 de los eslabones BC y CD serán iguales a

$$|\alpha_2| = \frac{a_{CB}^t}{l_2}, \quad |\alpha_3| = \frac{a_{CD}^t}{l_3}. \quad (6.4)$$

Sustituyendo en las igualdades (6.4) los segmentos correspondientes, tomados del plano de aceleraciones y del plano de posiciones obtenemos

$$|\alpha_2| = \frac{\mu_a \cdot n_2 c}{\mu_l \cdot BC}, \quad |\alpha_3| = \frac{\mu_a \cdot n_3 c}{\mu_l \cdot CD}$$

La razón $\frac{\mu_a}{\mu_l}$ posee unidades de s^{-2} .

Las direcciones de las aceleraciones angulares α_2 y α_3 pueden ser determinadas de la siguiente manera. Aplicando mentalmente los vectores \mathbf{a}_{CB}^t y \mathbf{a}_{CD}^t en el punto C , vemos que la dirección de α_2 coincide con la dirección de giro de las manecillas del reloj, y que la dirección de α_3 es contraria a la de las manecillas del reloj.

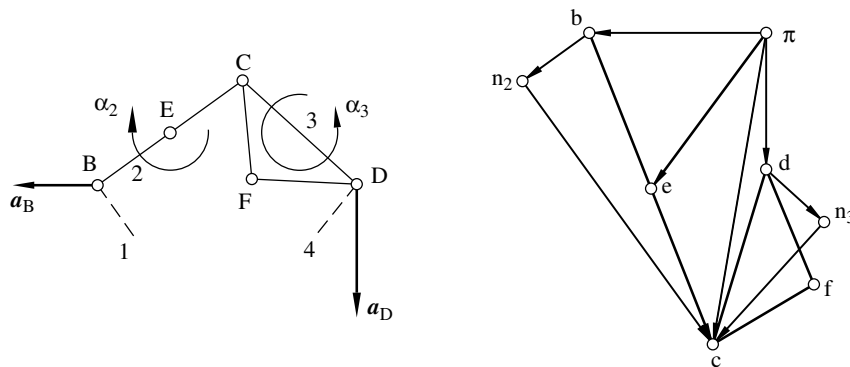


Fig. 6.3

Para determinar la aceleración de cualquier punto E , situado en el eje del eslabón BC (Fig. 6.3), podemos plantear la siguiente ecuación

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{EB}, \quad (6.5)$$

Del curso básico de mecánica sabemos que cuando un cuerpo realiza un movimiento rotatorio plano alrededor de un punto determinado Q (Fig. 6.4) las aceleraciones de todos los puntos del cuerpo son proporcionales al radio-vector que une cada punto con el centro de giro.

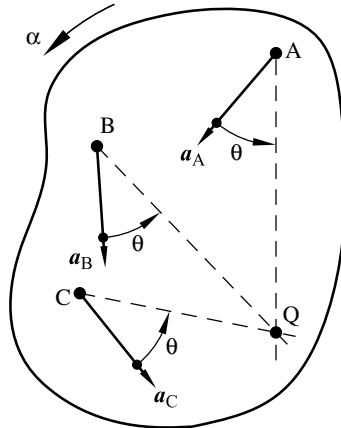


Fig. 6.4

La dirección de los vectores de las aceleraciones forma con estos radios-vectores un ángulo constante θ , el cual puede ser determinado a partir de la siguiente ecuación

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

Donde α es la aceleración angular del cuerpo y ω es la velocidad angular del mismo.

Ya que el movimiento relativo del eslabón 2 alrededor del punto B es un movimiento giratorio, entonces las aceleraciones relativas de todos los puntos del eslabón 2 formarán con los radios-vectores partientes del punto B un ángulo constante θ , que satisface la siguiente igualdad

$$\tan \theta = \frac{\alpha_{BC}}{\omega_{BC}^2} \quad (6.6)$$

Por consiguiente la dirección del vector a_{EB} deberá coincidir en el plano de aceleraciones con la dirección del vector a_{CB} , es decir coincide con la dirección del segmento bc (Fig. 6.3). La magnitud del segmento be , el cual representa en el plano de aceleraciones a la aceleración a_{EB} se determina de la condición de proporcionalidad de las aceleraciones con respecto a los radios-vectores, es decir

$$\frac{a_{EB}}{a_{CB}} = \frac{l_{EB}}{l_{CB}} \quad (6.7)$$

Sustituyendo en la proporción (6.7) los correspondientes segmentos tomados del plano de aceleraciones, obtenemos

$$\frac{\mu_a be}{\mu_a bc} = \frac{l_{BE}}{l_{BC}},$$

de donde

$$be = bc \frac{l_{BE}}{l_{BC}} \quad (6.8)$$

De la fórmula (6.8) se deduce que para determinar el segmento del plano de aceleraciones que representa la aceleración relativa a_{EB} es necesario dividir el segmento que representa a la aceleración relativa a_{CB} en la misma relación en la que el punto E divide al eslabón 2 en el plano de posiciones. Después de trazar el segmento obtenido be en el plano y unir el punto e con el polo π , obtenemos el segmento πe , que representa la aceleración total del punto E en la escala μ_a . Es decir

$$a_E = \mu_a \cdot \pi e.$$

Para determinar la aceleración de un punto cualquiera F unido rígidamente al eslabón 3 (Fig. 6.3), se puede hacer uso de la regla de semejanza descrita. Para esto construimos sobre el segmento cd del plano de aceleraciones el triángulo cdf semejante al triángulo CDF . El triángulo así construido estará girado con respecto a su semejante del plano de posiciones, en el ángulo θ (Fórmula 6.6). Para comprobar la corrección de las figuras semejantes construidas podemos revisar la correspondencia en el orden de las letras en el esquema y en el plano de aceleraciones. Así, si el orden de las letras en el esquema siguiendo el contorno del eslabón en sentido horario es C, D y F, en el plano de aceleraciones este orden debe conservarse es decir c, d y f .

De manera igual que en el problema de las velocidades los vectores de las aceleraciones totales de todos los puntos de los eslabones tienen su comienzo en el punto π ó polo del plano de aceleraciones. Los vectores de las aceleraciones relativas unen entre si los finales de los vectores de las aceleraciones totales.

6.1. ACELERACIONES PARA GRUPOS DE II CLASE, SEGUNDO TIPO.

Para determinar las aceleraciones de un grupo de II clase del segundo tipo actuamos de manera análoga a como lo hicimos en el problema de las velocidades, es decir presuponemos que son conocidas la aceleración a_B del punto B (Fig. 6.5) y las aceleraciones de todos los puntos del eslabón 4. Por consiguiente es conocida su aceleración angular α_4 .

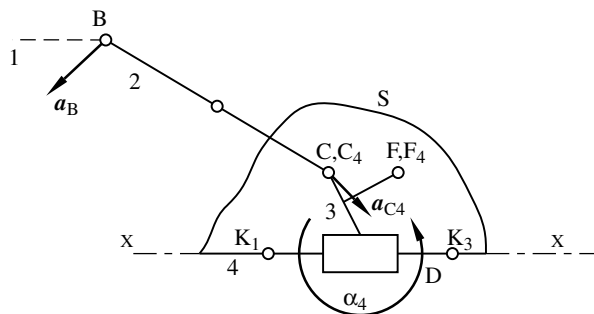


Fig. 6.5

Al eslabón 4 fijamos el plano S y encontramos en este plano el punto C_4 coincidente en esta posición con el punto C perteneciente al eslabón 3. Son conocidos los vectores a_B y a_{C_4} de las aceleraciones de los puntos B y C_4 .

La aceleración del punto C se determina a partir de las ecuaciones

$$a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t, \quad a_C = a_{C_4} + a_{CC_4}^C + a_{CC_4}^r, \quad (6.9)$$

La aceleración relativa $a_{CC_4}^r$ es la aceleración del punto C con respecto al plano S perteneciente al eslabón 4. Como el eje de la directriz $x - x$ junto con el plano S realiza un movimiento complejo de giro y

desplazamiento, además de la aceleración relativa $\mathbf{a}_{CC_4}^r$, en la segunda ecuación debe tenerse en cuenta la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_{CC_4}^C$. Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (6.9) obtenemos

$$\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t = \mathbf{a}_{C_4} + \mathbf{a}_{CC_4}^C + \mathbf{a}_{CC_4}^r, \quad (6.10)$$

En la ecuación (6.10) los vectores de las aceleraciones \mathbf{a}_B y \mathbf{a}_{C_4} son conocidos. La magnitud de la aceleración \mathbf{a}_{CB}^n se determina por la fórmula

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_2} = \omega_2^2 l_2 = \frac{\mu_v^2 (bc)^2}{\mu_l BC} = \mu_a bn,$$

donde bc y BC son segmentos tomados del plano de velocidades y del plano de posiciones. μ_l , μ_v y μ_a son los factores de escala de longitudes, velocidades y aceleración respectivamente. El vector \mathbf{a}_{CB}^n está orientado paralelo a BC del punto C al punto B .

La magnitud de la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_{CC_4}^C$ es igual a

$$a_{CC_4}^C = 2|\omega_4|v_{CC_4} = 2|\omega_4|\mu_v(c_4c), \quad (6.11)$$

donde el segmento CC_4 debe ser tomado del plano de velocidades (Fig. 5.2b). La dirección del vector de la aceleración de Coriolis puede ser determinado usando métodos generales de Álgebra vectorial. Tenemos

$$\mathbf{a}_{CC_4}^C = 2\boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{v}_{CC_4}, \quad (6.12)$$

De la igualdad (6.12) se deduce que el vector $\mathbf{a}_{CC_4}^C$ está en el plano de movimiento del mecanismo, y para determinar su dirección es suficiente girar el vector \mathbf{v}_{CC_4} (velocidad del punto C con respecto al plano S) en 90° en la dirección de giro determinada por el vector $\boldsymbol{\omega}_4$. Por lo tanto el vector $\mathbf{a}_{CC_4}^C$ es perpendicular al eje $x - x$ de la directriz, y la su magnitud se determina por la fórmula (6.11), sustituyendo en esta fórmula la velocidad angular ω_4 y la longitud del segmento CC_4 tomada del plano de velocidades, la cual representa a v_{CC_4} en la escala μ_v .

De los vectores \mathbf{a}_{CB}^t y $\mathbf{a}_{CC_4}^r$ que entran en la ecuación (6.10) solamente se conoce su dirección. El primero \mathbf{a}_{CB}^t es perpendicular a BC y el segundo $\mathbf{a}_{CC_4}^r$ es paralelo al eje $x - x$ de la directriz del par de deslizamiento. De manera que en la ecuación (6.10) sólo se desconocen las magnitudes de las aceleraciones \mathbf{a}_{CB}^t y $\mathbf{a}_{CC_4}^r$. Para determinar estas direcciones construimos el plano de aceleraciones (Fig. 6.6)

Para ello escogemos un punto cualquiera π como polo del plano de aceleraciones y partiendo de el trazamos las aceleraciones ya conocidas de los puntos B y C_4 en forma de los segmentos πb y πc_4 , los cuales representan en la escala escogida μ_a , las aceleraciones \mathbf{a}_B y \mathbf{a}_{C_4} . Luego se determinan las aceleraciones \mathbf{a}_{CB}^n y $\mathbf{a}_{CC_4}^C$, y las consignamos en la escala μ_a en forma de los segmentos bn y c_4k . Desde los puntos n y k trazamos dos rectas con la dirección de la aceleraciones \mathbf{a}_{CB}^t y $\mathbf{a}_{CC_4}^r$. La aceleración $\mathbf{a}_{CC_4}^r$ es paralela a $x - x$ y

la aceleración \mathbf{a}_{CB}^t perpendicular a BC . El punto c de intersección de estas dos direcciones nos muestra el final del vector \mathbf{a}_C de la aceleración total del punto C.

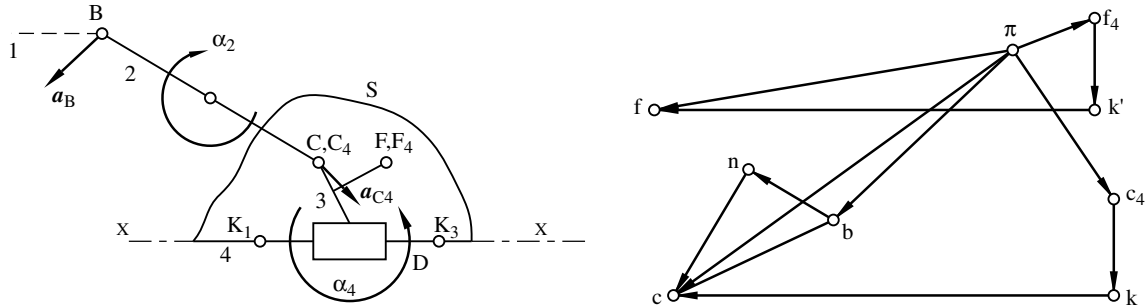


Fig. 6.6

La magnitud de la aceleración total \mathbf{a}_C del punto C es

$$a_C = \mu_a \cdot \pi c.$$

La magnitud de la aceleración angular α_2 del eslabón 2

$$|\alpha_2| = \frac{a_{CB}^t}{l_2} = \frac{\mu_a \cdot nc}{\mu_l \cdot BC}.$$

La dirección de esta aceleración se determina de la misma manera que en el grupo anteriormente estudiado. La aceleración angular α_3 del eslabón 3 es igual a $\alpha_3 = \alpha_4$, ya que el eslabón 3 “entra” con el eslabón 4 en un par de desplazamiento.

La aceleración de cualquier punto en la línea BC del eslabón 2 se determina con construcciones análogas a las que se realizaron en la solución del grupo del primer tipo, es decir utilizando el principio de semejanza de las figuras en el plano de aceleraciones y en el plano de posición del mecanismo.

La aceleración de un punto cualquiera perteneciente al eslabón 3, se puede determinar con la ecuación

$$\mathbf{a}_F = \mathbf{a}_{F_4} + \mathbf{a}_{FF_4}^C + \mathbf{a}_{FF_4}^r. \quad (6.13)$$

La aceleración \mathbf{a}_{F_4} del punto F_4 , perteneciente al plano S , es conocida, ya que las aceleraciones de todos los puntos del eslabón 4 son dadas. La magnitud de la aceleración $\mathbf{a}_{FF_4}^C$ es igual a

$$a_{FF_4}^C = 2|\omega_4|v_{FF_4} = 2|\omega_4|v_{CC_4} = a_{CC_4}^C,$$

ya que $v_{FF_4} = v_{CC_4}$ la aceleración $\mathbf{a}_{FF_4}^r = \mathbf{a}_{CC_4}^r$, ya que el movimiento del eslabón 3 con respecto al eslabón 4 es rectilíneo. Entonces la ecuación (6.13) se puede escribir así:

$$\mathbf{a}_F = \mathbf{a}_{F_4} + \mathbf{a}_{CC_4}^C + \mathbf{a}_{CC_4}^r, \quad (6.14)$$

Los vectores de la parte derecha de la ecuación (6.14) son conocidos; por consiguiente el vector \mathbf{a}_F se determina como la suma geométrica de estos vectores. Para determinar este vector desde el punto f_4 (Fig. 6.6)

trazamos el segmento f_4k' , igual y paralelo al segmento c_4k . Luego desde el punto k' trazamos el segmento $k'f$ igual y paralelo al segmento kc . El segmento resultante πf representa en escala μ_a la aceleración total del punto F, es decir,

$$a_F = \mu_a \cdot \pi f.$$

6.2. ALGUNAS CONSIDERACIONES PRÁCTICAS SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS PLANOS DE VELOCIDADES Y ACELERACIONES.

Los planos de velocidades y aceleraciones se construyen después de resolver el problema de las posiciones (construcción del plano de posición), la construcción de los planos se realiza para cada grupo estructural de los cuales está conformado el mecanismo. Inicialmente se construye el plan de velocidades (aceleraciones) del grupo que está unido con los elementos de sus pares cinemáticos extremos al eslabón primario y al bastidor, luego se construyen los planos de velocidad (aceleraciones) del segundo y resto de grupos, tomados en el mismo orden en el cual éstos se unen cuando conforman el mecanismo. Este orden está explícito en la fórmula estructural del mecanismo.

En la Fig. 6.7a se muestra el eslabón primario AB (grupo de I clase) dibujado a escala $\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} \frac{m}{mm}$.

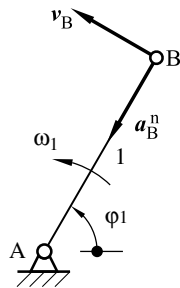


Fig. 6.7 a

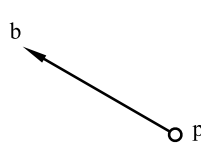


Fig. 6.7 b

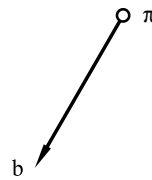


Fig. 6.7 c

El eslabón AB gira a velocidad angular constante ω_1 . La magnitud de la velocidad del punto B es $v_B = \omega_1 (AB) \mu_l$, y su aceleración normal (igual a la aceleración total) $a_B^n = \omega_1^2 (AB) \mu_l$. En el plano de velocidades la velocidad del punto B se representa con el segmento pb (Fig. 6.7 b), y la aceleración normal de este punto se representa con el segmento πb (Fig. 6.7 c). Los factores de escala de los planos de velocidades y aceleraciones serán correspondientemente

$$\mu_v = \frac{\omega_1 (AB) \mu_l \text{ ms}^{-1}}{pb \text{ mm}},$$

$$\mu_a = \frac{\omega_1^2 (AB) \mu_l \text{ ms}^{-2}}{\pi b \text{ mm}},$$

Los planos de velocidad y aceleraciones en los cuales los segmentos pb y πb (los cuales representan la velocidad y la aceleración del punto B del eslabón conductor o primario), se toman arbitrariamente iguales en longitud al segmento AB (el cual representa en el plano de posiciones la longitud l_{AB} del mismo), se denominan *planos construidos en la escala de la manivela*. Las escalas de estos planos se calculan así:

$$\mu_v = \omega_1 \mu_l \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}$$

$$\mu_a = \omega_1^2 \mu_l \frac{\text{ms}^{-2}}{\text{mm}}$$

LECCIÓN No 6. ANÁLISIS DE ACELERACIONES POR EL MÉTODO GRÁFICO DE LOS PLANOS

Cuando la longitud de los eslabones de un mecanismo son comparables con la longitud del eslabón inicial (no lo superan en longitud más de 6...8 veces), se aconseja construir los planos de velocidad y aceleraciones en la escala de la manivela, ya que esto simplifica los cálculos

Los problemas de construcción de planos de posición, velocidades y aceleraciones se deben resolver en el siguiente orden.

- 1) Se realiza el análisis estructural del mecanismo
Cálculo de la movilidad, identificación de grupos por clase, determinación de la clase del mecanismo. Se plantea la fórmula estructural del mismo.
- 2) Se escoge el eslabón primario (si éste no está determinado en las condiciones del problema)
Debe tenerse en cuenta que la selección del eslabón primario afecta la clasificación del mecanismo.
- 3) Se escoge el factor de escala para la construcción del plano de posición y se marcan en el dibujo las posiciones de los elementos inmóviles de los pares cinemáticos del mecanismo. Con la coordenada generalizada dada se construye la posición del eslabón primario.
- 4) Se construyen los planos de posición de cada grupo de Assur en el orden de formación del mecanismo.
- 5) Se construye el plano de velocidad del eslabón primario en la escala escogida, o se calcula dicha escala si se toma la decisión de construir el plano en la escala de la manivela.
- 6) Se construyen los planos de velocidades de cada grupo de Assur en el orden de formación del mecanismo.
- 7) Se construye el plano de aceleraciones del mecanismo.

Ejemplo: Construir el plano de velocidades y de aceleraciones del mecanismo de una máquina limadora (Fig. 6.8). Encontrar la velocidad y la aceleración del eslabón 5. Datos: $\varphi_1 = 300^\circ$, $l_{AB} = 0,05$ m, $l_{AC} = 0,12$ m, $l_{CD} = 0,200$ m, $H = 0,10$ m, $l_{DE} = 0,08$ m. Velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 10$ s⁻¹.

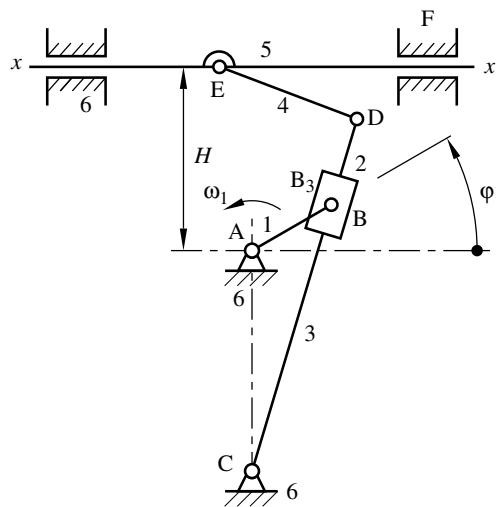


Fig. 6.8

Solución:

- 1) Análisis estructural del mecanismo

Número de eslabones $k = 6$

Número de eslabones móviles $n = 5$

Número de pares cinemáticos de V clase $p_V = 7$

Número de grados de libertad $W = 3n - 2p_V = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$.

El mecanismo se compone de la siguiente manera: Al eslabón conductor AB y al bastidor 6 se une un grupo de Assur de II clase del tercer tipo, compuesto por los eslabones 2 y 3. A este grupo y al bastidor se une otro grupo de II clase del segundo tipo, compuesto por los eslabones 4 y 5. El mecanismo es de II clase. La fórmula constructiva del mecanismo se puede escribir así: $I_1 \rightarrow II_{2,3} \rightarrow II_{4,5}$.

2) Construimos el plano de posición del mecanismo. Escogemos la longitud del segmento AB igual a 25 mm, por esto el coeficiente de escala del esquema será

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,05}{25} = 0,002 \frac{\text{m}}{\text{mm}}$$

La longitud de los demás segmentos del esquema será entonces:

$$AC = \frac{l_{AC}}{\mu_l} = \frac{0,12}{0,002} = 60\text{mm} \quad CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0,2}{0,002} = 100\text{mm}$$

$$h = \frac{H}{\mu_l} = \frac{0,10}{0,002} = 50\text{mm} \quad DE = \frac{l_{DE}}{\mu_l} = \frac{0,08}{0,002} = 40\text{mm}$$

Con las medidas obtenidas construimos el plano de posición del mecanismo (ver Fig. 6.9)

3) Construimos el plano de velocidades del mecanismo. Comenzamos con el grupo I_1 .

La magnitud de la velocidad v_B del punto B es

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 10 \cdot 0,05 = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Escogemos un punto p como polo y trazamos el segmento pb , el cual representa la velocidad del punto B, perpendicular a AB y en correspondencia con la dirección de giro del eslabón AB . La longitud de pb la escogemos igual a $AB = 25$ mm. Es decir, construimos el plano de velocidades en “escala de manivela”.

El coeficiente de escala del plano de velocidades será entonces

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{\omega_1 (AB) \mu_l}{pb} = \omega_1 \cdot \mu_l = 10 \cdot 0,002 = 0,02 \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}$$

4) Continuamos con el grupo de Assur, compuesto por los eslabones 2,3, ya que éste está unido directamente al eslabón primario y al bastidor. El plano de velocidades lo construimos de acuerdo a las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$v_{B_3} = v_B + v_{B_3B} \quad v_{B_3} = v_C + v_{B_3C}$$

donde

v_{B_3} es la velocidad del punto B_3 del eslabón 3, el cual está bajo el punto B;

v_B es la velocidad del punto B, de magnitud y dirección ya conocidas;

v_{B_3B} es la velocidad relativa del punto B_3 con respecto al punto B, dirigida paralela a la línea BC ;

v_C es la velocidad del punto C, y es igual a cero;

v_{B_3C} es la velocidad relativa del punto B con respecto al punto C al girar el eslabón 3,

su magnitud es $v_{B_3C} = \omega_3 \cdot l_{B_3C}$ (por el momento es desconocida), y está dirigida perpendicular a BC

Construimos la solución de la primera ecuación vectorial, mostrada arriba. A través del punto b trazamos la dirección de la velocidad v_{B_3B} , una línea paralela a CB_3 . Pasamos a construir la solución de la segunda ecuación vectorial mostrada arriba. Se debe trazar el vector de la velocidad del punto C, pero como su magnitud es igual a cero, su final lo situamos en

LECCIÓN No 6. ANÁLISIS DE ACELERACIONES POR EL MÉTODO GRÁFICO DE LOS PLANOS

el polo p y desde el punto p trazamos la dirección de la velocidad v_{B_3C} : una línea perpendicular a CB . La intersección de esta línea con la trazada antes (paralela a CB), nos da el final del vector de la velocidad v_{B_3} en el punto p_3 . El punto d , final del vector de la velocidad del punto D, lo encontramos por semejanza según la siguiente relación:

$$\frac{cd}{cb_3} = \frac{CD}{CB_3},$$

$$cd = cb_3 \frac{CD}{CB_3} = 16,7 \frac{100}{40,33} = 41,4 \text{ mm}$$

Nota: Esta operación puede ser realizada también haciendo un escalamiento referenciado del eslabón con ayuda del CAD. (Ver práctica No.3)

Pasamos a la construcción del plano de velocidades del grupo 4,5. Este plano lo construimos según las siguientes ecuaciones:

$$v_E = v_D + v_{ED} \quad v_E = v_{E_6} + v_{EE_6}$$

donde

v_E es la velocidad del punto E;

v_D es la velocidad del punto D (este vector ya está representado en el plano en forma del segmento pd)

v_{ED} es la velocidad relativa del punto E con respecto al punto D cuando el eslabón 4 gira

su magnitud es $v_{ED} = \omega_4 \cdot l_{DE}$ (por el momento desconocida), y está dirigida perpendicular a la línea DE

v_{E_6} es la velocidad del punto E_6 del eslabón 6 (el punto E_6 coincide con el punto E), La magnitud es igual a cero, ya que el eslabón 6 es inmóvil)

v_{EE_6} es la velocidad relativa del punto E con respecto a E_6 , está dirigida paralela a la línea $x-x$

La construcción se resume a trazar a través de d (de acuerdo a la primera ecuación) una línea perpendicular a DE , es decir perpendicular a la velocidad v_{ED} ; y a trazar a través del punto p (de acuerdo a la segunda ecuación) una línea paralela $x-x$. El punto e , de intersección de estas líneas, es el final del vector de la velocidad v_E del punto E. Situamos en el polo los puntos c, e_6, a y damos por terminada la construcción del plano de velocidades del mecanismo.

La velocidad del soporte (velocidad del punto E) es igual a

$$v_E = (pe)\mu_v = 44,55 \cdot 0,02 = 0,89 \text{ ms}^{-1}$$

5) Construimos el plano de aceleraciones. Comenzamos con el grupo I_1 .

La magnitud de la aceleración normal (es la misma total) del punto B es:

$$a_B^n = \omega_1^2 l_{AB} = 10^2 \cdot 0,05 = 5 \text{ ms}^{-2}$$

y está dirigida del punto B al punto A paralela a AB .

Escogemos un segmento $\pi b = AB = 25 \text{ mm}$, el cual representará en el plano de aceleraciones a la aceleración a_B . Ya que $\pi b = AB$ significa que construiremos el plano de aceleraciones en la "escala de la manivela".

El factor de escala del plano de aceleraciones es:

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{\omega_1^2 (AB)\mu_l}{\pi b} = \omega_1^2 \mu_l = 10^2 \cdot 0,002 = 0,2 \frac{\text{ms}^{-2}}{\text{mm}}$$

El segmento así escogido πb lo trazamos partiendo del polo π .

6) Construimos el plan de aceleraciones del grupo 2,3. La construcción la realizaremos según las siguientes dos ecuaciones vectoriales

$$\mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{B_3B}^C + \mathbf{a}_{B_3B}^r, \quad \mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{B_3C}^n + \mathbf{a}_{B_3C}^t,$$

donde

\mathbf{a}_{B_3} es la aceleración del punto B_3 el cual pertenece al eslabón 3 y coincide con el punto B del eslabón 1;

$\mathbf{a}_{B_3B}^C$ es la aceleración de Coriolis del movimiento del punto B_3 con relación al eslabón 2, su magnitud es

$$\mathbf{a}_{B_3B}^C = 2|\boldsymbol{\omega}_2|v_{BB_3} = 2\frac{v_{B_3C}}{l_{BC}}v_{BB_3}$$

(ya que $\omega_2 = \omega_3$ y $\omega_3 = \frac{v_{B_3C}}{l_{BC}}$) y tiene la dirección del vector de la velocidad relativa v_{BB_3} girada en 90° en la dirección

de la velocidad angular ω_2 del eslabón que realiza el movimiento de traslación (movimiento del eslabón 2);

$\mathbf{a}_{B_3B}^r$ es la aceleración relativa del punto B_3 con respecto al punto B, dirigida paralela a CB ;

\mathbf{a}_C es la aceleración total del punto C (es igual a cero);

$\mathbf{a}_{B_3C}^n$ es la aceleración normal del punto B_3 del giro del eslabón 3 con respecto al punto C, su magnitud es igual a

$$a_{B_3C}^n = \frac{v_{B_3C}^2}{l_{B_3C}}$$

y está dirigida paralela a la línea CB_3 del punto B_3 al punto C;

$\mathbf{a}_{B_3C}^t$ es la aceleración tangencial del punto B_3 del mismo movimiento del eslabón 3, su magnitud es

$$a_{B_3C}^t = \alpha_3 l_{B_3C}$$

y por el momento nos es desconocida, esta dirigida perpendicular a CB_3 .

Construimos la solución de la ecuación vectorial mostrada arriba, al segmento πb le agregamos el segmento bk que representa el vector de la aceleración de Coriolis. La longitud la hallamos por la formula

$$bk = \frac{a_{B_3B}^C}{\mu_a} = \frac{2v_{B_3C} \cdot v_{B_3B}}{l_{B_3C}\mu_a} = \frac{2(b_3c)(bb_3)\mu_v^2}{(B_3C)\mu_l\mu_a} = \frac{2 \cdot 16,7 \cdot 18,6}{40,33} = 15,4 \text{ mm}$$

los segmentos $b_3c = 16,7$ mm y $bb_3 = 18,6$ mm fueron tomados del plano de velocidades, y el segmento $B_3C = 40,33$ mm del plano de posición.

A través del punto k trazamos la dirección de la aceleración $\mathbf{a}_{B_3B}^r$, una línea paralela a CB .

Pasamos a resolver la segunda ecuación vectorial. Marcamos el punto c en el mismo punto π , ya que $a_C = 0$, desde el punto π trazamos el segmento πn_{B_3C} , el cual representa la aceleración normal $\mathbf{a}_{B_3C}^n$, su longitud es

$$\pi n_{B_3C} = \frac{v_{B_3C}^2}{l_{B_3C}\mu_a} = \frac{(pb_3)^2 \mu_v^2}{(B_3C)\mu_l\mu_a} = \frac{16,7^2}{40,33} = 6,92 \text{ mm}$$

LECCIÓN N° 6. ANÁLISIS DE ACELERACIONES POR EL MÉTODO GRÁFICO DE LOS PLANOS

Luego a través del punto πn_{B_3C} trazamos la dirección del vector de la aceleración $\mathbf{a}_{B_3C}^t$, una línea perpendicular a CB hasta la intersección con la línea trazada antes a través del punto k (paralela a CB). El punto de intersección b_3 nos muestra el final del vector de la aceleración \mathbf{a}_{B_3} .

El final del vector de la aceleración de la junta D (punto d) lo encontramos por la regla de semejanza a partir de la relación

$$\pi d = \pi b_3 \frac{CD}{CB_3} = 34,7 \frac{100}{40,33} = 86,04 \text{ mm}$$

Nota: Esta operación puede ser realizada también haciendo un escalamiento referenciado del eslabón con ayuda del CAD.

- 7) Pasamos a la construcción del plano de aceleraciones del grupo 4,5 según las siguientes ecuaciones
8)

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{ED}^n + \mathbf{a}_{ED}^t, \quad \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_{E_6} + \mathbf{a}_{EE_6}^C + \mathbf{a}_{EE_6}^r.$$

donde

\mathbf{a}_E es la aceleración del punto E;

\mathbf{a}_D es la aceleración del punto D (se determina con el segmento πd hallado antes);

$$a_D = \pi d \mu_a = 86,04 \cdot 0,2 = 17,2 \text{ ms}^{-2};$$

$\mathbf{a}_{ED}^n = \frac{v_{ED}^2}{l_{ED}}$ es la aceleración normal del punto E cuando el eslabón 4 gira con respecto a D (está dirigida paralela a la línea ED desde el punto E al punto D);

$\mathbf{a}_{ED}^t = \alpha_4 l_{ED}$ es la aceleración tangencial del mismo punto E del movimiento de 4 con respecto a D (está dirigida perpendicular a la línea ED);

\mathbf{a}_{E_6} es la aceleración del punto E_6 el cual pertenece al eslabón 6 (bastidor) y coincide con el punto E (es igual a cero);

$\mathbf{a}_{EE_6}^C$ es la aceleración de Coriolis del punto E del movimiento de éste con relación al bastidor (punto E_6), (es igual a cero);

$\mathbf{a}_{EE_6}^r$ es la aceleración relativa del punto E con relación al bastidor (punto E_6), (está dirigida paralela a $x - x$)

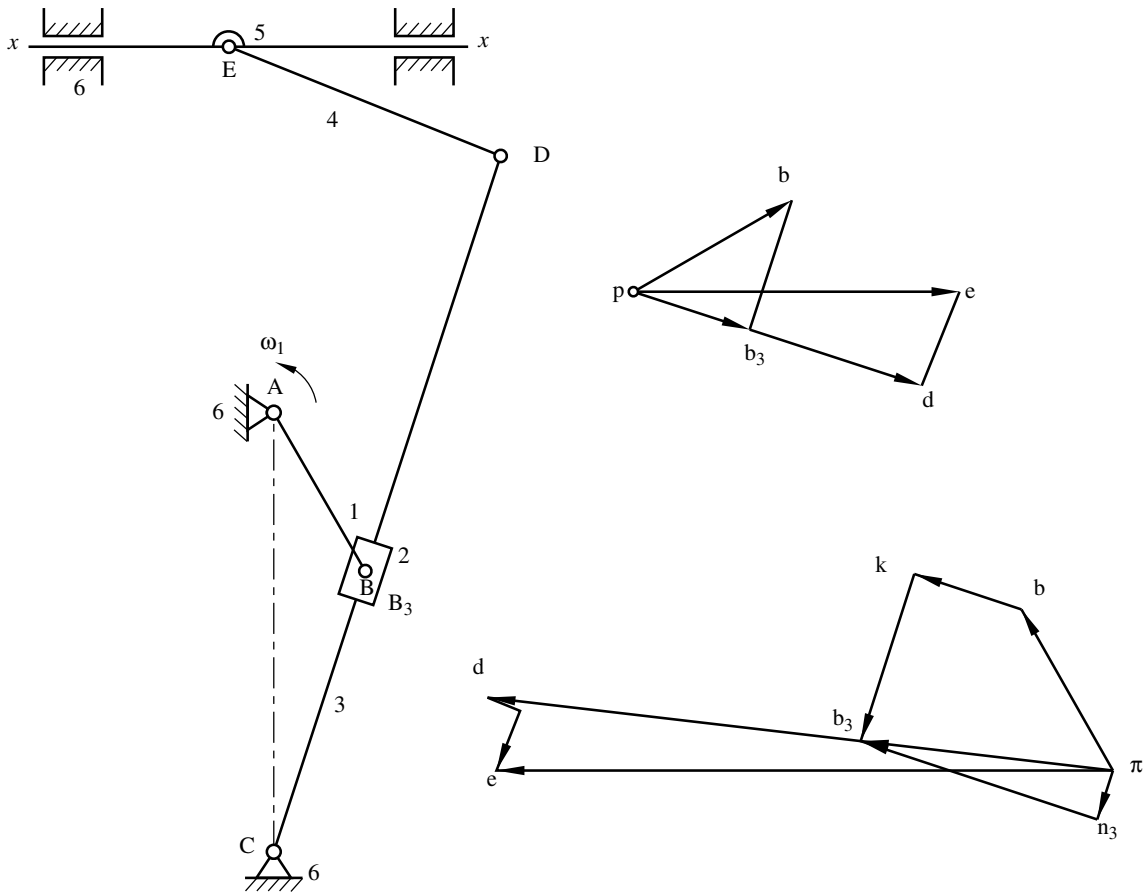
En concordancia con la primera ecuación vectorial desde el punto d trazamos el segmento dn_{ED} , el cual representa la aceleración normal \mathbf{a}_{ED}^n . Su longitud es igual a

$$dn_{ED} = \frac{v_{ED}^2}{l_{ED} \mu_a} = \frac{(ed)^2 \mu_v^2}{(ED) \mu_l \mu_a} = \frac{13,84^2}{40} = 4,8 \text{ mm}.$$

Luego a través del punto n_{ED} trazamos la dirección de la aceleración \mathbf{a}_{ED}^t línea perpendicular a DE y pasamos a las construcciones correspondientes a la segunda ecuación vectorial mostrada arriba. En el punto π consignamos los puntos e_6 y k' , ya que las magnitudes de las aceleraciones \mathbf{a}_{E_6} y $\mathbf{a}_{EE_6}^C$ son iguales a cero. Desde el punto π trazamos la dirección de la aceleración $\mathbf{a}_{EE_6}^r$ (línea paralela a $x - x$) hasta la intersección con la línea antes trazada desde el punto n_{ED} . El punto de intersección e es el final del vector de la aceleración del punto E, es decir la aceleración \mathbf{a}_E . Situamos en el polo del plano el punto a y con esto finalizamos la construcción del plano de aceleraciones del mecanismo.

La aceleración buscada del soporte (punto E) será igual

$$a_E = (\pi e) \mu_a = 84,25 \cdot 0,2 = 16,85 \text{ ms}^{-2}$$



6.3. PRÁCTICA DE LABORATORIO. POLÍGONO DE ACCELERACIONES.

CONTINUACIÓN DEL NUMERAL 5.3.

Hallar la aceleración absoluta del punto E y la aceleración angular del eslabón CD (eslabón 3), del mecanismo de cuatro barras tratado en la primera parte de la práctica.

Construcción del plano de aceleraciones del grupo I₁

Observaciones:

La magnitud de la aceleración a_B del punto B es

$$a_B = l_{AB} \cdot \omega_1^2 = 0,030 \cdot 20^2 = 12 \frac{m}{s^2}$$

Segmento que representa a $a_B \rightarrow \pi b = 30 \text{ mm}$ (construimos el plano de aceleraciones en la escala de la manivela).

El coeficiente de escala del plano de aceleraciones

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{12}{30} = 0,4 \frac{ms^{-2}}{mm}$$

Construcción del plano de aceleraciones del grupo II_{2,3}

Observaciones:

Las ecuaciones vectoriales para la aceleración \mathbf{a}_C son:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t \qquad \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t$$

La magnitud de \mathbf{a}_{CB}^n es:

$$a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 \cdot l_{BC} = \frac{v_{CB}^2}{l_{BC}} = \frac{(bc \cdot \mu_v)^2}{l_{BC}} = \frac{(41,3 \cdot 0,02)^2}{0,06} = 11,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La magnitud de \mathbf{a}_{CD}^n es:

$$a_{CD}^n = \omega_{CD}^2 \cdot l_{CD} = \frac{v_C^2}{l_{CD}} = \frac{(pc \cdot \mu_v)^2}{l_{CD}} = \frac{(15,9 \cdot 0,02)^2}{0,06} = 1,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

El segmento bn_2 que representa a \mathbf{a}_{CB}^n en el plano de aceleraciones es

$$bn_2 = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{11,4}{0,4} = 28,47 \text{ mm}$$

El segmento dn_3 que representa a \mathbf{a}_{CD}^n en el plano de aceleraciones es

$$dn_3 = \frac{a_{CD}^n}{\mu_a} = \frac{1,7}{0,4} = 4,2 \text{ mm}$$

Recomendaciones:

Para la construcción del plano de aceleraciones usar la capa (LAYER) ACELERACIÓN.
Para los atributos de los vectores use el bloque FLECHACEL.

Medir el segmento πe y calcular la aceleración del punto E

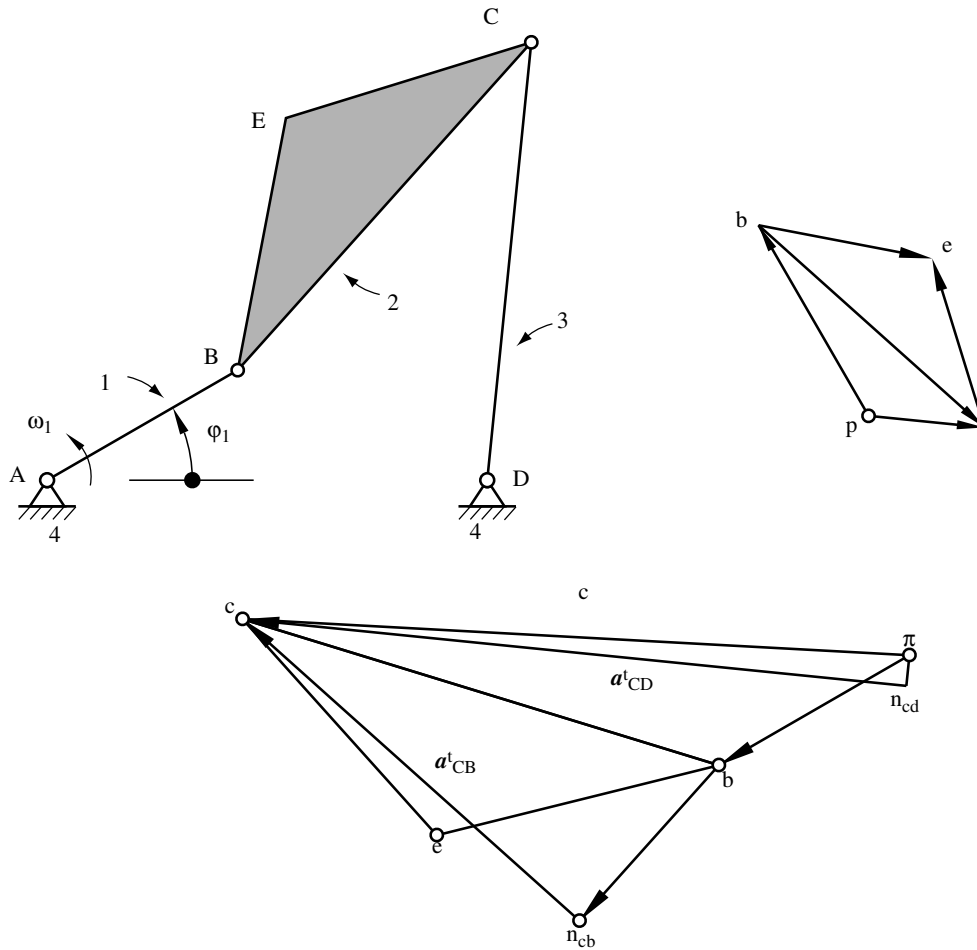
La magnitud de \mathbf{a}_E es

$$a_E = \pi e \cdot \mu_a = 68,95 \cdot 0,4 = 27,6 \text{ m/s}^2$$

La magnitud de α_3

$$\alpha_3 = \frac{a_{CD}^t}{l_{CD}} = \frac{n_3c \cdot \mu_a}{l_{CD}} = \frac{90,95 \cdot 0,4}{0,06} = 606,3 \text{ s}^{-2}$$

- Consignar estos dos resultados en el dibujo.
- Agregar textos. Situar correctamente el dibujo en las márgenes.
- Grabar e imprimir.



6.4. EJERCICIOS.

1. Determinar las velocidades y aceleraciones angulares de todos los eslabones y la velocidad y aceleración del punto C para la posición mostrada del mecanismo de cuatro barras. Datos: velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $l_{AB} = l_{BC} = l_{CD} = 400 \text{ mm}$, los segmentos AB y BC están en una misma línea, el ángulo $\angle BCD = 90^\circ$.
2. Encontrar la velocidad y la aceleración del punto D del eslabón 2 y las velocidades y aceleraciones angulares de todos los eslabones para la posición mostrada del mecanismo de biela deslizador. Datos: velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $l_{AB} = 100 \text{ mm}$, $l_{BC} = 200 \text{ mm}$, $l_{CD} = 100 \text{ mm}$, $\angle CAB = \angle CDB = 90^\circ$.

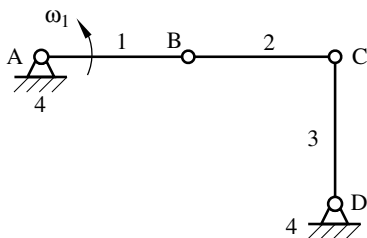


Fig. P.1

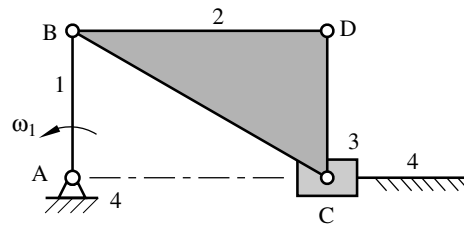


Fig. P.2

3. Determinar la velocidad y la aceleración del eslabón 3 para la posición dada del mecanismo de obtener el seno, mostrar también cómo se mueve en esta posición el eslabón 3 (con aceleración o desaceleración). Datos: velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 20 \text{ s}^{-1}$, $l_{AB} = 100 \text{ mm}$, $\varphi_1 = 45^\circ$.

LECCIÓN N° 7

DETERMINACIÓN DE LAS VELOCIDADES Y ACELERACIONES DE LOS GRUPOS DE III CLASE POR EL MÉTODO DE LOS PLANOS

7.1 LAS VELOCIDADES

La determinación de las velocidades y aceleraciones de los grupos de III clase puede ser realizada por el llamado *método de los puntos especiales de Assur*.

Dado el grupo de III clase con tres miembros de arrastre (Fig. 7.1), y dadas las velocidades y aceleraciones de los puntos B, C y D de los elementos extremos con los cuales los miembros de arrastre 4, 5 y 6 “entran” en pares cinemáticos giratorios con los eslabones 1, 2 y 3 del mecanismo base. Se pide determinar las velocidades y las aceleraciones de los eslabones del grupo.

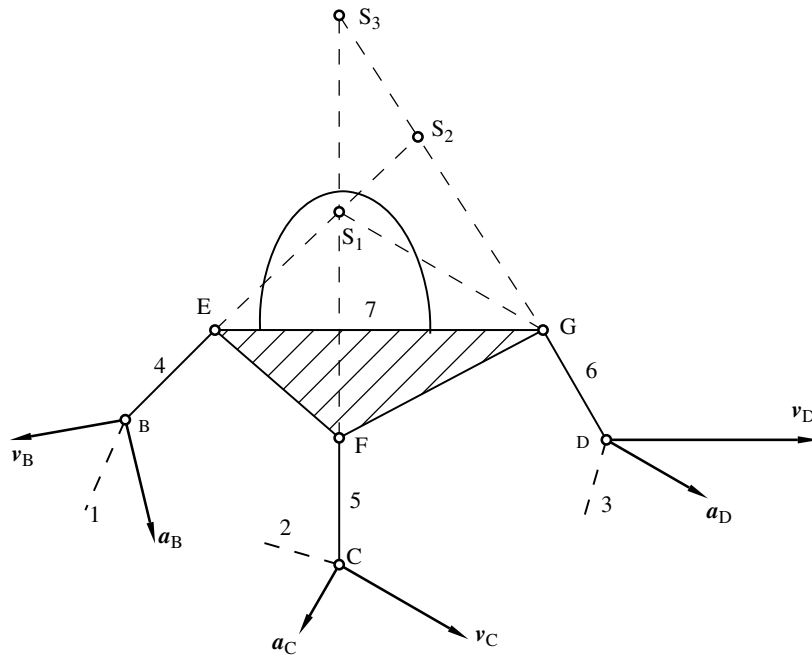


Fig. 7.1

Extendemos los ejes de los eslabones 4 y 5 hasta que se intersequen en el punto S_1 , el cual tomamos como perteneciente al eslabón 7.

Entonces desde el punto p trazamos los segmentos pb , pc y pd (Fig. 7.2 b) los cuales representan, en la escala escogida, a las velocidades dadas de los puntos B, C y D. La velocidad v_{S_1} del punto S_1 perteneciente al eslabón 7, está determinado por el siguiente sistema de ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned} v_{S_1} &= v_E + v_{S_1E} = v_B + \overline{v_{EB}} + \overline{v_{S_1E}} \cdot \\ v_{S_1} &= v_F + v_{S_1F} = v_C + \overline{v_{FC}} + \overline{v_{S_1F}} \cdot \end{aligned} \quad (7.1)$$

En las ecuaciones (7.1) los dos últimos vectores de cada ecuación están dirigidos sobre una misma línea, ya que ambos vectores son perpendiculares a S_1B ó a S_1C es decir, el vector $\mathbf{v}_{S_1B} = \overline{\mathbf{v}_{EB} + \mathbf{v}_{S_1E}}$ y es perpendicular a S_1B , y el vector $\mathbf{v}_{S_1C} = \overline{\mathbf{v}_{FC} + \mathbf{v}_{S_1F}}$ es perpendicular a S_1C .

Es decir el sistema (7.1) puede ser escrito

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{S_1} &= \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{S_1B} \\ \mathbf{v}_{S_1} &= \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{S_1C}\end{aligned}$$

Utilizando estas ecuaciones trazamos a través del punto b del plano de velocidades una recta con la dirección de la velocidad \mathbf{v}_{S_1B} , perpendicular a S_1B y desde el punto c , una recta con la dirección del vector de la velocidad \mathbf{v}_{S_1C} , perpendicular a S_1C . El punto s_1 de intersección de estas dos rectas en el plano de velocidades (Fig. 7.2b), representa el final del vector de la velocidad \mathbf{v}_{S_1} del punto S_1 . La magnitud de la velocidad de este punto es igual

$$v_{S_1} = \mu_v(ps_1).$$

Luego unimos con una recta el punto S_1 con el punto G y planteamos las siguientes ecuaciones para determinar la velocidad del punto G

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_{S_1} + \mathbf{v}_{GS_1}, \quad \mathbf{v}_G = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{GD}. \quad (7.2)$$

Utilizando las ecuaciones (7.2), trazamos a través de los puntos s_1 y d del plano de velocidades, dos rectas, las cuales tienen las direcciones de las velocidades \mathbf{v}_{S_1G} y \mathbf{v}_{GD} , correspondientemente perpendiculares a GS_1 y GD . El punto g de intersección de estas dos rectas muestra el final del vector de la velocidad \mathbf{v}_G del punto G . La magnitud de la velocidad \mathbf{v}_G será

$$v_G = \mu_v(pg).$$

Conociendo las velocidades de los puntos S_1 y G , Las velocidades de los puntos E y F pueden ser halladas construyendo una figura semejante a S_1GFES_1 sobre el plano de velocidades o planteando las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_E &= \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{EG}, & \mathbf{v}_E &= \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{EB} \\ \mathbf{v}_F &= \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{FG}, & \mathbf{v}_F &= \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{FC}.\end{aligned}$$

La construcción de estas velocidades se muestra en el Fig. 7.2.

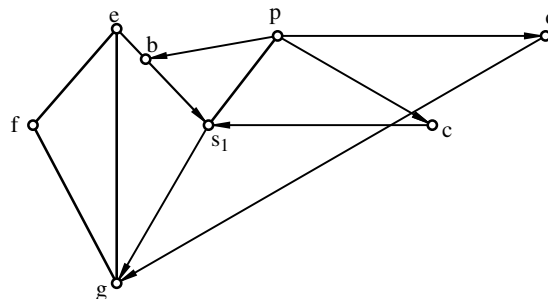


Fig. 7.2

El punto S_1 de intersección de los ejes de dos miembros de arrastre se denomina *punto especial*. Un punto especial puede ser hallado mediante la intersección de dos miembros de arrastre cualesquiera (Fig. 7.1). De

manera que en un grupo con tres miembros de arrastre pueden identificarse tres puntos especiales S_1, S_2, S_3 y usando cualquiera de ellos se puede construir el plano de velocidades. La elección de uno de ellos está determinada solamente por la comodidad en las construcciones gráficas.

Hay que tener en cuenta que los puntos S_1, S_2 y S_3 pertenecen al eslabón en forma de triángulo rígido EGF y no a los miembros de arrastre, en la intersección de los ejes de los cuales ellos se encuentran.

7.2. LAS ACELERACIONES.

La solución del problema de las aceleraciones de los grupos de III clase con tres miembros de arrastre, se halla de manera análoga al de las velocidades. Así como lo hicimos para las velocidades utilizamos el punto especial S_1 perteneciente al eslabón 7 (Fig. 7.1 y 7.2a). En calidad de punto especial pudo haber sido escogido cualquiera de los tres puntos especiales.

Escogemos en la superficie del dibujo un punto arbitrario π (Fig. 7.2b), en calidad de polo del plano de aceleraciones y trazamos partiendo de allí los segmentos $\pi b, \pi c$ y πd ; los cuales representan, en escala escogida μ_a las aceleraciones a_B, a_C y a_D de los puntos B, C y D. La aceleración a_{S_1} del punto especial S_1 se determina a partir de las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{S_1} &= a_B + \overline{a_{EB}^n + a_{S_1E}^n} + \overline{a_{EB}^t + a_{S_1E}^t} = a_B + a_{S_1B}^n + a_{S_1B}^t \\ a_{S_1} &= a_C + \overline{a_{FC}^n + a_{S_1F}^n} + \overline{a_{FC}^t + a_{S_1F}^t} = a_C + a_{S_1C}^n + a_{S_1C}^t \end{aligned} \quad (7.3)$$

En las ecuaciones (7.3) las sumas de las aceleraciones normales y tangenciales se muestran como los vectores resultantes $a_{S_1B}^n, a_{S_1C}^n, a_{S_1C}^t$ y $a_{S_1B}^t$, ya que las direcciones de sus componentes coinciden.

Las magnitudes de las aceleraciones relativas normales se determinan de la manera común a partir de las ecuaciones

$$a_{EB}^n = \frac{v_{EB}^2}{l_{BE}}, \quad a_{S_1E}^n = \frac{v_{S_1E}^2}{l_{ES_1}}, \quad a_{FC}^n = \frac{v_{FC}^2}{l_{CF}}, \quad a_{S_1F}^n = \frac{v_{S_1F}^2}{l_{FS_1}}.$$

Las direcciones de estos vectores también se determinan por los mismos métodos ya conocidos. Ya que los miembros de cada una de las sumas de las aceleraciones tangenciales coinciden en dirección, no es necesario determinar las componentes de cada una de estas sumas. Para hallarlas es suficiente trazar las líneas de acción de los vectores de las aceleraciones tangenciales a través de los finales de las resultantes de los vectores de las aceleraciones normales $a_{S_1B}^n, a_{S_1C}^n$. La dirección de estos vectores está determinada como perpendicular a los vectores de las aceleraciones normales. Con esta finalidad desde los puntos b y c del plano de aceleraciones trazamos los segmentos bn_2 y cn_1 , los cuales representan (en escala μ_a) las aceleraciones $a_{S_1B}^n$ y $a_{S_1C}^n$.

Luego, a través de los puntos n_2 y n_1 trazamos rectas en la dirección de las aceleraciones $a_{S_1C}^t$ y $a_{S_1B}^t$, las cuales son perpendiculares a S_1B y S_1C respectivamente. El punto s_1 , de intersección de estas dos rectas muestra el final del vector a_{S_1} de la aceleración total del punto S_1 , la magnitud del cual se determina

$$a_{S_1} = \mu_a (\pi s_1)$$

La aceleración del punto G se encuentra con ayuda de la ecuación

$$a_G = a_{S_1} + a_{GS_1}^n + a_{GS_1}^t, \quad a_G = a_D + a_{GD}^n + a_{GD}^t$$

Desde los puntos d y s_1 del plano de aceleraciones trazamos los segmentos dn_4 y s_1n_3 , los cuales representan en la escala μ_a las aceleraciones a_{GD}^n y $a_{GS_1}^n$, luego desde n_3 y n_4 trazamos rectas en la dirección de las aceleraciones tangenciales $a_{GS_1}^t$ y a_{GD}^t perpendiculares a GS_1 y GD . El punto g , de intersección de estas rectas muestra el final del vector a_G de la aceleración total del punto G. Conociendo la aceleración a_G es fácil determinar la aceleración de los otros puntos del grupo, construyendo una figura semejante a S_1GFES_1 sobre el plano de aceleraciones; o planteando las ecuaciones correspondientes. Por ejemplo, la aceleración del punto E se determina a partir de las ecuaciones

$$a_E = a_G + a_{EG}^n + a_{EG}^t, \quad a_E = a_B + a_{EB}^n + a_{EB}^t$$

Las construcciones correspondientes se muestran en la Fig. 7.3.

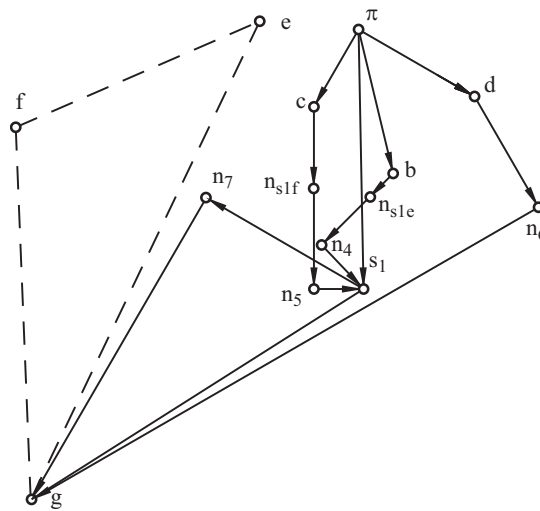


Fig 7.3

Ejemplo 7.1

Encontrar la velocidad v_C y la aceleración a_C del punto C para el mecanismo de Roberts.

Datos: $l_{AB} = 20$ mm, $l_{BC} = l_{CE} = l_{CD} = l_{DG} = l_{EF} = 50$ mm, $l_{DE} = 24$ mm, $H = 10$ mm, $H_1 = 25$ mm, $H_2 = 50$ mm, velocidad angular del eslabón AB constante e igual a $\omega_1 = 5$ s⁻¹, $\varphi_1 = 240^\circ$.

DESARROLLO

1. Análisis estructural

$$n = 5; p_V = 7$$

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_V = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$$

$$I_1 \rightarrow III_{2,3,4,5}$$

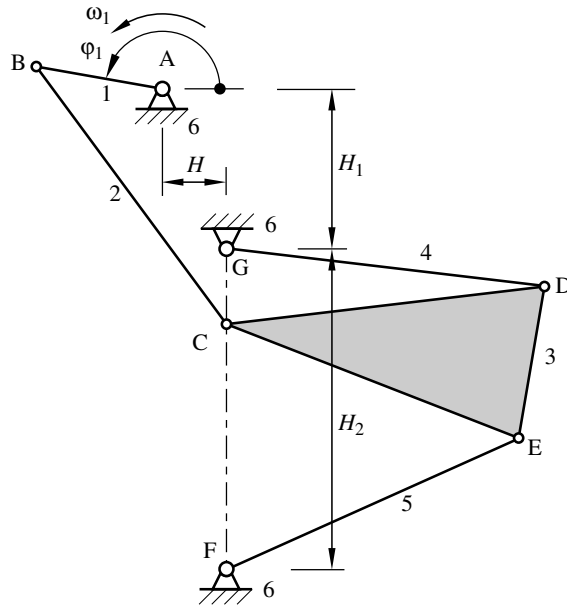


Fig. 7.4

2. Plano de posiciones

$$AB = 20 \text{ mm}$$

$$\mu_l = \frac{0,020}{20} = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{mm}}$$

3. Plano de velocidades

Grupo I₁

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 5 \cdot 0,020 = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$pb = 40 \text{ mm}$$

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{0,1}{40} = 0,0025 \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}$$

Grupo III_{2,3,4,5}

$$1) v_{S_3} = v_B + v_{CB} + v_{S_3C} = v_C + v_{S_3C} \perp BC$$

$$v_{S_3} = v_F + v_{EF} + v_{S_3F} = v_E + v_{S_3E} \perp EF$$

$$2) v_D = v_{S_3} + v_{DS_3} \perp DS_3$$

$$v_D = v_{DG} \perp GD$$

Observación: La velocidad de C se halla construyendo una figura semejante a S_3EDCS_3 (plano de posiciones), en el plano de velocidades, basándose en los puntos s_3 y d hallados.

$$v_C = pc \cdot \mu_v = 34,83 \cdot 0,0025 = 0,0871 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 87,1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

4. Plano de aceleraciones

Grupo I₁

$$a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB} = 5^2 \cdot 0,020 = 0,5 \frac{m}{s^2}$$

$$\pi b = 40 \text{ mm}$$

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{0,5}{40} = 0,0125 \frac{ms^2}{mm}$$

Grupo III_{2,3,4,5}

$$1) a_{S_3} = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t + a_{S_3C}^n + a_{S_3C}^t$$

$$a_{S_3} = a_F + a_{EF}^n + a_{EF}^t + a_{S_3E}^n + a_{S_3E}^t$$

Reagrupando

$$a_{S_3} = \overbrace{a_B + a_{CB}^n + a_{S_3C}^n}^{\parallel BC} + \overbrace{a_{CB}^t + a_{S_3C}^t}^{\perp BC}$$

$$a_{S_3} = \overbrace{a_F + a_{EF}^n + a_{S_3E}^n}^{\parallel EF} + \overbrace{a_{EF}^t + a_{S_3E}^t}^{\perp EF}$$

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_{CB}} = \frac{(cb \cdot \mu_v)^2}{l_{CB}} = \frac{(37,45 \cdot 0,0025)^2}{0,050} = 0,1753 \frac{m}{s^2} \rightarrow bn_1 = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{0,1753}{0,0125} = 14,03 \text{ mm}$$

$$a_{S_3C}^n = \frac{v_{S_3C}^2}{l_{S_3C}} = \frac{(s3c \cdot \mu_v)^2}{S_3C \cdot \mu_l} = \frac{(4,71 \cdot 0,0025)^2}{12,12 \cdot 0,001} = 0,0114 \frac{m}{s^2} \rightarrow n_1n_2 = \frac{a_{S_3C}^n}{\mu_a} = \frac{0,0114}{0,0125} = 0,912 \text{ mm}$$

$$a_{EF}^n = \frac{v_{EF}^2}{l_{EF}} = \frac{(pe \cdot \mu_v)^2}{l_{EF}} = \frac{(15,64 \cdot 0,0025)^2}{0,050} = 0,0306 \frac{m}{s^2} \rightarrow \pi n_{31} = \frac{a_{EF}^n}{\mu_a} = \frac{0,0306}{0,0125} = 2,45 \text{ mm}$$

$$a_{S_3E}^n = \frac{v_{S_3E}^2}{l_{S_3E}} = \frac{(s3e \cdot \mu_v)^2}{S_3E \cdot \mu_l} = \frac{(17,64 \cdot 0,0025)^2}{44,97 \cdot 0,001} = 0,043 \frac{m}{s^2} \rightarrow n_3n_4 = \frac{a_{S_3E}^n}{\mu_a} = \frac{0,043}{0,0125} = 3,44 \text{ mm}$$

$$bn_2 = bn_1 + n_1n_2 = 14,03 + 0,91 = 14,94 \text{ mm}$$

$$\pi n_4 = \pi n_3 - n_3n_4 = 2,45 - 3,44 = 0,99 \text{ mm}$$

$$2) a_D = a_{S_3} + \overbrace{a_{DS_3}^n}^{\parallel DS_3} + \overbrace{a_{DS_3}^t}^{\perp DS_3}$$

$$a_D = a_{DG}$$

$$a_{DS_3}^n = \frac{v_{DS_3}^2}{l_{DS_3}} = \frac{(ds3 \cdot \mu_v)^2}{DS3 \cdot \mu_l} = \frac{(19,896 \cdot 0,0025)^2}{51,21 \cdot 0,001} = 0,0483 \frac{m}{s^2} \rightarrow s_3n_5 = \frac{a_{DS_3}^n}{\mu_a} = \frac{0,0483}{0,0125} = 3,86 \text{ mm}$$

$$a_{DG}^n = \frac{v_{DG}^2}{l_{DG}} = \frac{(dg \cdot \mu_v)^2}{DG \cdot \mu_l} = \frac{(18,26 \cdot 0,0025)^2}{50 \cdot 0,001} = 0,0417 \frac{m}{s^2} \rightarrow gn_6 = \frac{a_{DG}^n}{\mu_a} = \frac{0,0417}{0,0125} = 3,34 \text{ mm}$$

Observación: La aceleración de C se halla construyendo una figura semejante a S_3EDCS_3 (plano de posiciones), en el plano de aceleraciones basándose en los puntos s_3 y d hallados

$$a_C = \pi c \cdot \mu_v = 41,5 \cdot 0,0125 = 0,519 \frac{m}{s^2} = 519 \frac{mm}{s^2}$$

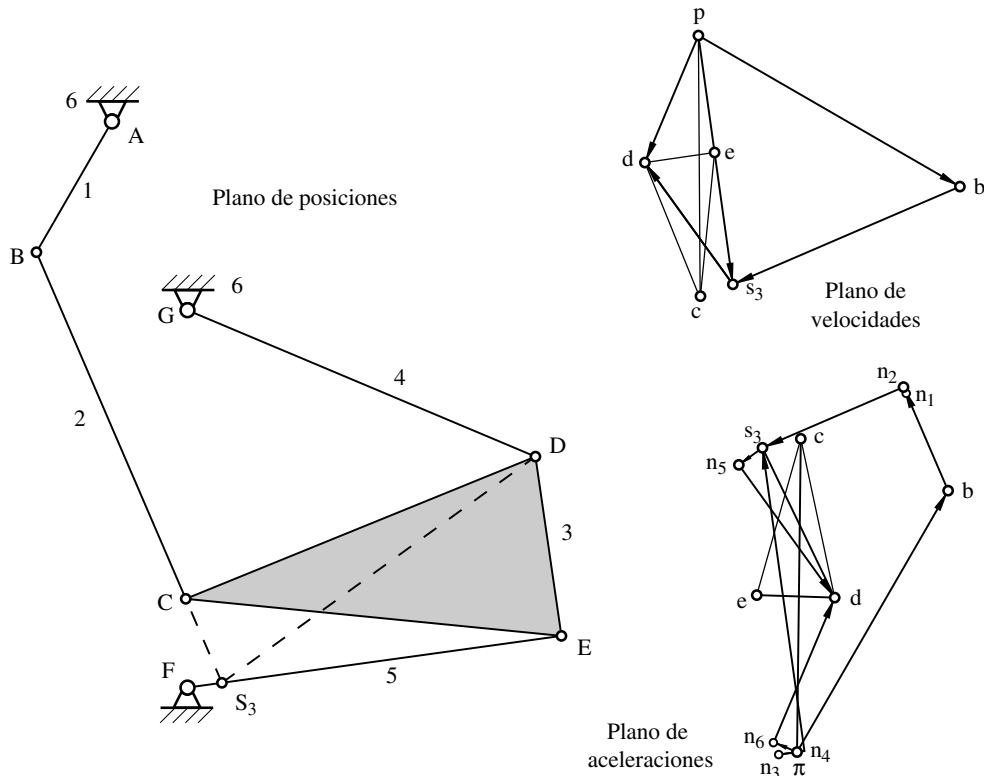


Fig 7.5

EJERCICIOS

7.1 Determinar las velocidades y aceleraciones angulares de los eslabones 2, 3 y 5 para el mecanismo triturador mostrado en la Fig. 7.6. Si la velocidad angular del eslabón 1 es $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$ en sentido antihorario, las dimensiones de los eslabones son:

$L_{AB} = 180 \text{ mm}$, $L_{BC} = 260 \text{ mm}$, $L_{GK} = 620 \text{ mm}$, $L_{EA} = 685 \text{ mm}$, $h_1 = 568 \text{ mm}$, $h_2 = 644 \text{ mm}$, $h_3 = 164 \text{ mm}$, $h_4 = 105 \text{ mm}$, $h_5 = 655 \text{ mm}$, $h_6 = 60 \text{ mm}$.

R: $\omega_2 = 6,732 \text{ rad/s}$ antihorario, $\omega_3 = \omega_4 = 1,39 \text{ rad/s}$ horario, $\omega_5 = 2,436 \text{ rad/s}$ horario, $\alpha_2 = 102,89 \text{ rad/s}^2$ antihorario, $\alpha_3 = \alpha_4 = 31,157 \text{ rad/s}^2$ horario, $\alpha_5 = 53,34 \text{ rad/s}^2$ antihorario

LECCIÓN N° 8

DIAGRAMAS CINEMÁTICOS

8.1 CONSTRUCCIÓN DE DIAGRAMAS CINEMÁTICOS

Cuando se estudia un mecanismo desde el punto de vista cinemático puede ser necesario realizar este estudio para el ciclo completo de movimiento del mecanismo dado. Para esto el análisis analítico o gráfico de las posiciones, velocidades y aceleraciones se ejecuta para una serie de posiciones del mecanismo lo suficientemente cercanas entre sí. Los resultados obtenidos de estas magnitudes físicas pueden ser presentadas en forma de tabla o con estos resultados se pueden construir gráficos, llamados *diagramas cinemáticos*.

Dependiendo del carácter del movimiento de los eslabones o de determinados puntos estudiados pueden ser construidos distintos diagramas cinemáticos. En la práctica, cada diagrama cinemático por lo general es la representación gráfica del cambio de uno de los parámetros cinemáticos del eslabón: desplazamientos, velocidades o aceleraciones de un punto del eslabón del mecanismo en función del tiempo o del desplazamiento del eslabón primario del mecanismo, es decir en función de la coordenada generalizada.

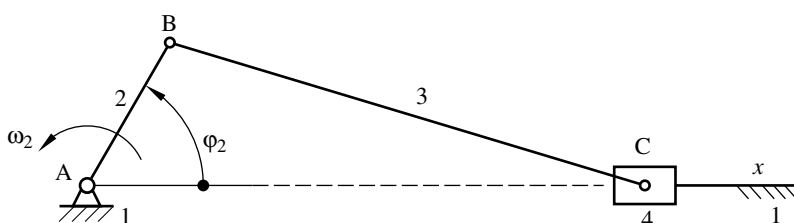


Fig. 8.1

Por ejemplo, si tenemos un mecanismo de manivela - deslizador (Fig. 8.1), para los desplazamientos s_C , velocidades v_C y aceleraciones a_C , del punto C, el cual se desplaza linealmente, lo más cómodo es construir los diagramas cinemáticos de la variación de estos parámetros en relación al tiempo t ó en relación a la coordenada generalizada φ_2 . Es decir, construir la representación gráfica de las siguientes expresiones

$$s_C = f_s(t), \quad v_C = f_v(t), \quad a_C = f_a(t)$$

ó

$$s_C = f_s(\varphi_2), \quad v_C = f_v(\varphi_2), \quad a_C = f_a(\varphi_2)$$

si el ángulo φ_2 fue tomado como coordenada generalizada.

Si lo que estamos estudiando son los desplazamientos angulares φ_3 , las velocidades angulares ω_3 , y las aceleraciones angulares α_3 de la biela (Fig. 8.1), entonces se pueden construir los gráficos de las siguientes relaciones.

$$\varphi_3 = f_\varphi(t), \quad \omega_3 = f_\omega(t), \quad \alpha_3 = f_\alpha(t)$$

ó

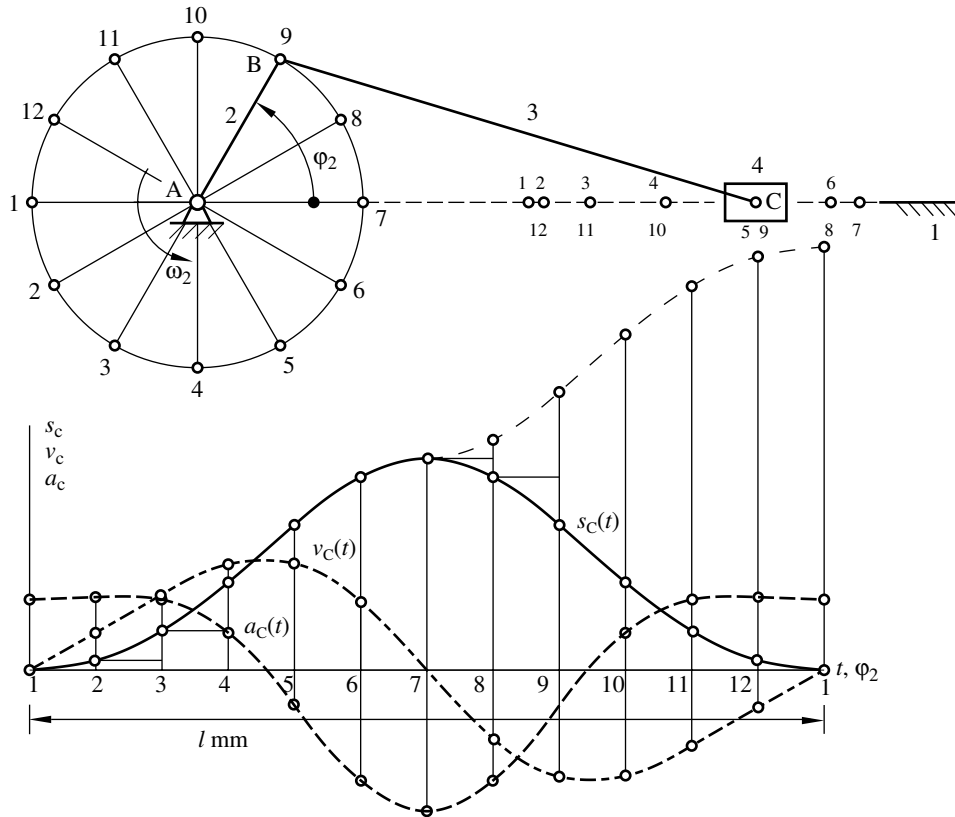
$$\varphi_3 = f_\varphi(\varphi_2), \quad \omega_3 = f_\omega(\varphi_2), \quad \alpha_3 = f_\alpha(\varphi_2)$$

En calidad de ejemplo miremos la construcción de los diagramas cinemáticos $s_C = f_s(t)$, $v_C = f_v(t)$, $a_C = f_a(t)$ del movimiento del punto C del mecanismo de manivela - deslizador ABC, cuando la manivela gira con velocidad angular constante ω_2 (Fig. 8.2a). Con este fin, con ayuda de los métodos expuestos en las lecciones N° 4, 5, 6 y 7 encontramos los desplazamientos de los puntos B y C. Tomamos como origen para los desplazamientos de C la posición extrema izquierda del deslizador. Trazamos los ejes de coordenadas (Fig. 8.2b) y sobre el eje de las abscisas trazamos el segmento $l \text{ mm}$, el cual representa en la escala μ_t el tiempo T invertido en una revolución completa de la manivela, es decir

$$T = \frac{60}{n} = \mu_t \cdot l \tag{8.1}$$

donde n es la rapidez de giro de la manivela en r.p.m. De la igualdad (8.1) se obtiene el valor del factor de escala de tiempos. Tenemos

$$\mu_t = \frac{60}{n \cdot l} \tag{8.2}$$



$1mm \rightarrow \mu_l m$; $1mm \rightarrow \mu_v m/s$; $1mm \rightarrow \mu_a m/s^2$; $1mm \rightarrow \mu_t s$; $1mm \rightarrow \mu_s m$; $1mm \rightarrow \mu_\phi rad$.

Fig. 8.2

Al segmento l lo dividimos en 12 partes iguales que corresponden a los puntos 1, 2, 3, ... consignamos las distancias recorridas por el punto C (Fig. 8.2a) desde la posición extrema izquierda C_1 del deslizador. Así, en el punto 2 (Fig. 8.2b) trazamos en dirección paralela al eje de las ordenadas, el segmento C_1C_2 , en el punto 3 el segmento C_1C_3 , etc. Si tomamos los segmentos C_1C_2 , C_1C_3 , ... directamente del plano de posiciones (Fig. 8.2a), entonces la escala del diagrama $s_C = f_s(t)$ por el eje de las ordenadas, será igual a μ_l , es decir la misma escala que en el plano de posiciones. Desde la posición C_7 , cuando el punto C ocupa la posición extrema derecha (Fig. 8.2a), las distancias C_7C_8 , C_7C_9 , se restan de la ordenada C_1C_7 , consignada en la posición C_7 . De esta manera, la curva $s_C = f_s(t)$ en la posición cuando la manivela 2 vuelva a su posición inicial, tendrá una ordenada igual a cero. La curva así construida es la *curva de las distancias del punto C* desde el punto extremo izquierdo del deslizador. Si se necesita construir la *curva de recorridos del punto C*, entonces desde la posición C_7 , cuando el punto C ocupa la posición extrema derecha (Fig. 8.2a), las distancias C_7C_8 , C_7C_9 , se deben sumar al segmento ya consignado C_1C_7 . En la Fig. 8.2b esta parte de la curva de recorridos se muestra en línea de trazos.

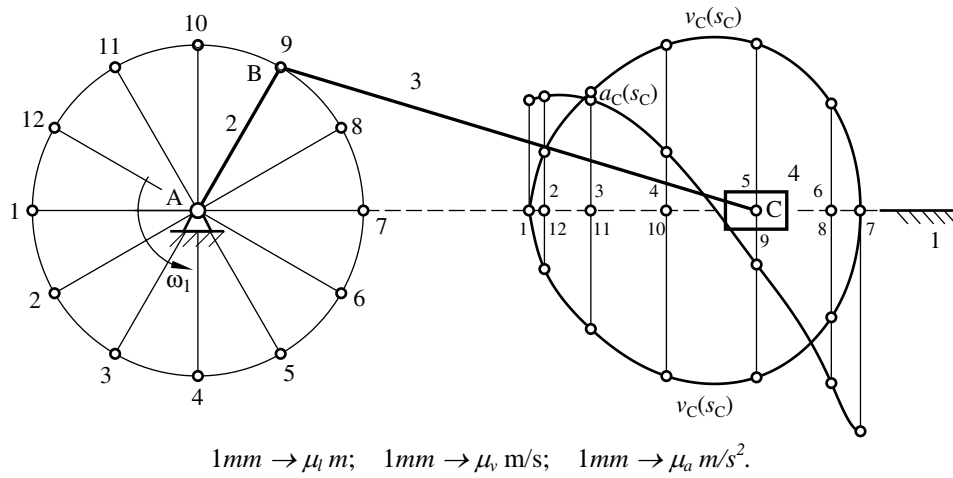
Ya que la manivela gira con velocidad angular constante ω_2 , se puede considerar que en el eje de las abscisas está consignado no sólo el tiempo t , sino también el ángulo de giro ϕ_2 del eslabón 2, es decir, los diagramas $s_C = f_s(t)$, $v_C = f_v(t)$ y $a_C = f_a(t)$ serán al mismo tiempo los diagramas $s_C = f_s(\phi_2)$, $v_C = f_v(\phi_2)$ y $a_C = f_a(\phi_2)$. El factor de escala μ_ϕ sobre el eje de las abscisas en estos diagramas será

$$\mu_\phi = \frac{2\pi}{l},$$

donde el segmento l debe ser tomado del dibujo en milímetros.

Para la construcción de los diagramas $v_C = f_v(t)$ y $a_C = f_a(t)$, los segmentos que representan en los planos de velocidades y aceleraciones a la velocidad v_C y a la aceleración a_C se trazan en las ordenadas a través de los puntos 1, 2, 3, ... (Fig. 8.2b) teniendo en cuenta el signo de v_C y a_C . Si los segmentos se toman rectamente de los planos de velocidades y aceleraciones, entonces las escalas de las curvas $v_C = f_v(t)$ y $a_C = f_a(t)$, serán iguales a las escalas μ_v y μ_a de los planos de velocidades y aceleraciones. Si se tiene en cuenta la condición antes nombrada estos últimos diagramas también serán los diagramas de $v_C = f_v(\phi_2)$ y $a_C = f_a(\phi_2)$.

En algunos casos resulta cómodo construir los diagramas $v_C = f_v(s_C)$ y $a_C = f_a(s_C)$ sobre el plano de posición del mecanismo Fig. 8.3.



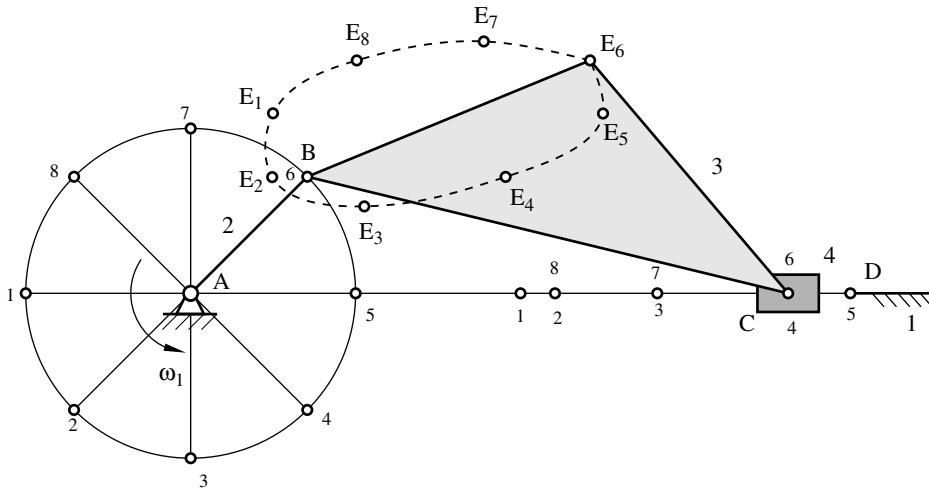
$1mm \rightarrow \mu_i m; \quad 1mm \rightarrow \mu_v m/s; \quad 1mm \rightarrow \mu_a m/s^2.$

Fig. 8.3

Para hacer esto tomamos como origen de coordenadas el punto C_1 y en la ordenadas, trazadas a través de los puntos C_1, C_2, C_3, \dots , consignamos los segmentos tomados de los planos de velocidades y aceleraciones, los cuales representan las velocidades v_C y las aceleraciones a_C del punto C. La curva $a_C = f_a(s_C)$ para la carrera del deslizador de izquierda a derecha y de derecha a izquierda coincide, si no se toma en cuenta el signo de la aceleración a_C . Si se consideran como positivas las aceleraciones en las cuales su dirección coincide con la dirección de las velocidades correspondientes, y negativas en las cuales su dirección es contraria a las de las velocidades correspondientes, entonces la curva $a_C = f_a(s_C)$ se debe construir como se muestra en la Fig. 8.3 con línea de trazos.

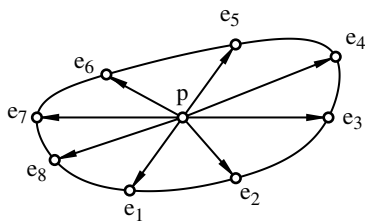
En el ejemplo visto el punto observado se movía de manera rectilínea. Para los puntos que posean movimiento curvilíneo es más cómodo construir diagramas cinemáticos que muestren no sólo las magnitudes absolutas de las velocidades y las aceleraciones, sino también la dirección de los vectores de las velocidades y las aceleraciones totales. Para esto dibujamos los vectores de las velocidades y las aceleraciones tomados de los planos de velocidades y aceleraciones, partiendo desde polos comunes p y π en su dirección verdadera. Si luego de esto unimos el final de todos los vectores con una curva suave, la curva así obtenida se denominará *hodógrafo* de velocidad o correspondientemente *hodógrafo* de aceleración.

En las figuras 8.4b y 8.4c se muestran los hodógrafos de velocidades y de aceleraciones del punto E de la biela del mecanismo de manivela - deslizador ABC (Fig. 8.4 a).



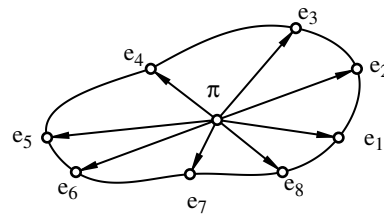
$1mm \rightarrow \mu_i m$

Fig. 8.4a



$1mm \rightarrow \mu_v m/s$

Fig. 8.4b



$1mm \rightarrow \mu_a m/s^2$

Fig. 8.4c

Ejemplo:

Construir los diagramas cinemáticos $s_C = f_s(\varphi_1)$, $v_C = f_v(\varphi_1)$ y $a_C = f_a(\varphi_1)$ del movimiento del punto C para el mecanismo de manivela - deslizador mostrado. Datos $l_{AB} = 60 \text{ mm}$, $l_{BC} = 180 \text{ mm}$. Velocidad angular de la manivela AB constante e igual a $\omega_1 = 100 \text{ s}^{-1}$.

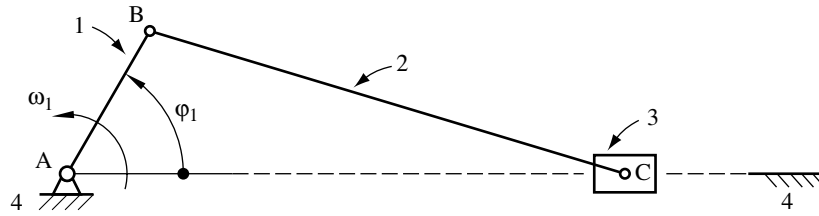


Fig. 8.5

Desarrollo

1. Análisis estructural

$$n = 3; p_v = 4$$

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_v = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

$$I_1 \rightarrow \Pi_{2,3}$$

2. Plano de posiciones

$$AB = 30 \text{ mm}$$

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,060}{30} = 0,002 \frac{\text{m}}{\text{mm}}$$

Construidas las posiciones del mecanismo para 12 posiciones equidistantes de la manivela AB se toman los datos de las distancias recorridas por C desde la posición extrema izquierda C_1 del deslizador. Los datos $C_1 C_i$ para cada posición se consignan en una tabla y en el gráfico. Uniendo con una curva suave los puntos correspondientes a cada posición se encuentra la curva de relación $s_C = f_s(\varphi_1)$.

$$\mu_s = \mu_l$$

$$l = 120 \text{ mm}$$

$$\mu_t = \frac{60}{n \cdot l} = \frac{60}{954,93 \cdot 120} = 5,24 \cdot 10^{-4} \frac{\text{s}}{\text{mm}}$$

Ya que la manivela gira con velocidad angular constante ω_1 , se puede considerar que en el eje de las abscisas está consignado no sólo el tiempo t , sino también el ángulo de giro φ_1 del eslabón 1.

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{l} = \frac{2\pi}{120} = 0,0524 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$$

3. Planos de velocidades

Grupo I₁

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 100 \cdot 0,060 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$pb = 30 \text{ mm}$$

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{6}{30} = 0,2 \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}$$

Grupo II_{2,3}

$$v_C = v_B + v_{CB \perp CB}$$

$$v_C = v_{C_4} + v_{CC_4 // x-x}$$

Basándose en las ecuaciones anteriores se construyen los planos de velocidades para las 12 posiciones equidistantes de la manivela AB. Los segmentos pc , correspondientes a la velocidad v_C del punto C se trasladan directamente al diagrama cinemático en el punto correspondiente de las ordenadas para cada posición. En este caso la escala de velocidades en el diagrama cinemático y en los planos de velocidades serán iguales.

Uniendo con una curva suave los puntos correspondientes a cada posición de la manivela se encuentra la curva de relación $v_C = f_v(\varphi_1)$

4. Planos de aceleraciones

Grupo I₁

$$a_B^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB} = 100^2 \cdot 0,06 = 600 \frac{m}{s^2}$$

$$\pi b = 30 \text{ mm}$$

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{600}{30} = 20 \frac{ms^{-2}}{mm}$$

Grupo II_{2,3}

$$a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t$$

// CB ⊥ CB

$$a_C = a_{C_4} + a_{CC_4}^C + a_{CC_4}^r // x-x$$

Basándose en las ecuaciones anteriores se construyen los planos de aceleraciones para las 12 posiciones equidistantes de la manivela AB. Los segmentos π , correspondientes a la aceleración a_C del punto C se trasladan directamente al diagrama cinemático en el punto correspondiente de las ordenadas para cada posición. En este caso la escala de aceleraciones en el diagrama cinemático y en los planos de aceleraciones serán iguales.

Uniendo con una curva suave los puntos correspondientes a cada posición de la manivela se encuentra la curva de relación $a_C = f_a(\varphi_1)$.

Tabla 8.1

pos.	fi1°	C1Ci(mm)	SC1Ci(m)	pb	vC (m/s)	pi-c	aC (m/s ²)
1	0	0	0	0	0	20,019	400,384
2	30	2,7604	0,00552	10,61	2,1217	20,693	413,85
3	60	11,1684	0,02234	21,46	4,2916	19,985	399,698
4	90	24,8528	0,04971	30	6	10,607	212,132
5	120	41,1684	0,08234	30,5	6,1007	10,015	200,302
6	150	54,722	0,10944	19,39	3,8783	31,269	625,38
7	180	59,7751	0,11955	0	0	40	800
8	210	54,722	0,10944	19,39	3,8783	31,269	625,38
9	240	41,1684	0,08234	30,5	6,1007	10,015	200,302
10	270	24,8528	0,04971	30	6	10,607	212,132
11	300	11,1684	0,02234	21,46	4,2916	19,985	399,698
12	330	2,7604	0,00552	10,61	2,1217	20,693	413,85
1	360	0	0	0	0	20,019	400,384

En la Fig 8.6 se muestra el diagrama cinemático del deslizador en función de la posición angular de la manivela.

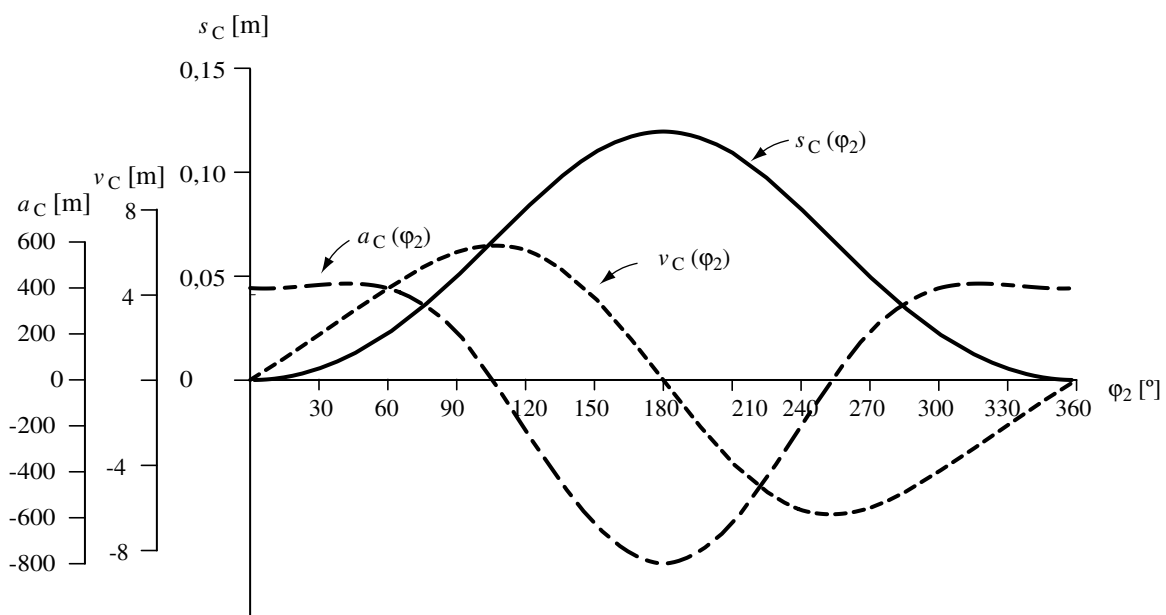


Fig 8.6 Diagrama cinemático

BIBLIOGRAFÍA

Artobolevski I.I. Teoría de mecanismos y máquinas. Moscú. Nauka 1988

Kozhevnikov S.N. Mecanismos. Barcelona. Gustavo Gili S.A. 1975

Norton R.L. Diseño de Maquinaria. México D.F. McGraw-Hill 1995